

Głównym celem tego projektu jest zrozumienie, w jaki sposób pewne symetrie pochodzące z teorii liczb, znane jako reprezentacje Galois, wchodzą w interakcję z głębokimi strukturami geometrycznymi, które pojawiają się w procesie degeneracji różnistości Calabiego–Yau. Różnistości Calabiego–Yau to obiekty geometryczne leżące na styku wielu dziedzin matematyki i fizyki. Charakteryzują się dwiema kluczowymi cechami: posiadają nieznikającą formę objętości oraz wykazują pewną kohomologiczną prostotę. Właściwości te sprawiają, że odgrywają one centralną rolę w takich dziedzinach jak geometria algebraiczna, analiza zespolona, teoria liczb, a także fizyka teoretyczna, zwłaszcza teoria strun, a ostatnio również modele opisujące grawitacyjne oddziaływania między dwiema czarnymi dziurami.

Nasze podejście do badania różnistości Calabiego–Yau opiera się na metodzie degeneracji. Oznacza to, że analizujemy rodziny takich przestrzeni, w których większość elementów jest gładka i ma dobre własności geometryczne, natomiast niektóre szczególne elementy stają się osobliwe, czyli rozwijają pewne geometryczne "defekty". Te osobliwe włókna często zawierają bogate informacje o całej rodzinie.

Badamy dwa różne rodzaje degeneracji.

W pierwszym przypadku rozważamy rodzinę różnistości Calabiego–Yau nad dyskiem zespolonym, gdzie jedno centralne włókno staje się osobliwe. Z taką rodziną związany jest operator monodromii, rodzaj przekształcenia, które opisuje, jak zmienia się geometria gładkich włókien przy obchodzeniu punktu osobliwego. Kluczowym celem w tym kontekście jest zrozumienie, jak monodromia związana jest ze strukturą włókna centralnego, a w szczególności, jak wpływa na działanie grup Galois na granicznej mieszanej strukturze Hodge'a, narzędziu algebraicznym służącym do śledzenia struktury degeneracji.

W drugim przypadku przechodzimy ze świata zespolonego do arytmetycznego. Rozważamy tu różnistości Calabiego–Yau zdefiniowane nad liczbami p -adycznymi, systemami liczbowymi, które naturalnie pojawiają się w teorii liczb. Ponownie badamy degeneracje, tym razem jednak w tzw. charakterystyce mieszanej (gdzie geometria wykazuje zarówno cechy charakterystyki 0, jak i charakterystyki p). Naszym celem jest zrozumienie, jak geometria tych degeneracji wpływa na pewne obiekty arytmetyczne, mianowicie na czynniki Eulera funkcji L , które zawierają informacje arytmetyczne o różnistości. Szczególnie ekscytującym kierunkiem jest tu poszukiwanie nowych przykładów różnistości Calabiego–Yau w charakterystyce p , które nie dają się podnieść do charakterystyki 0, zjawisko to sugeruje istnienie zupełnie nowego zachowania arytmetycznego.

W całym projekcie będziemy pracować z dwoma typami różnistości Calabiego–Yau: produktami włóknistymi Schoena oraz pewnymi podwójnymi nakryciami przestrzeni rzutowej. Przykłady te stanowią żyzny grunt do eksploracji złożonych powiązań między geometrią, teorią liczb a algebrą.