

FALE STOJĄCE POD OGRANICZENIAMI W NIELINIOWYCH RÓWNANIACH RÓŻNICZKOWYCH CZĄSTKOWYCH

Jarosław Mederski

Projekt badawczy poświęcony jest analizie różnych nieliniowych, stacjonarnych, eliptycznych równań różniczkowych cząstkowych z dodatkowymi ograniczeniami w przestrzeni funkcji całkowalnych kwadratowo (przestrzeni Lebesgue'a L^2). W szczególności koncentrujemy się na nieliniowych równaniach Schrödingera oraz układach sprzężonych równań, które należą do najbardziej znaczących nieliniowych równań różniczkowych cząstkowych w literaturze i pojawiają się naturalnie w wielu kontekstach fizycznych, takich jak kondensacja Bosego–Einsteina, optyka nieliniowa, fale wodne, fale Langmuira w plazmach i wiele innych.

Powszechnie wiadomo, że w czasie ewolucji masa w równaniu Schrödingera jest zachowana, co w naturalny sposób prowadzi do badania fal stacjonarnych przy zadanej normie L^2 (lub, bardziej ogólnie, ograniczeniu w przestrzeni Lebesgue'a). Ograniczenie to ma jasną interpretację fizyczną, zależną od konkretnego modelu: może na przykład oznaczać całkowitą liczbę atomów w kondensacie Bosego–Einsteina lub moc zasilania w układach optyki nieliniowej.

Choć w ostatnich latach rozwiązano kilka istotnych otwartych problemów, wciąż pojawiają się nowe wyzwania matematyczne — z których wiele jest ściśle związanych z fizycznym znaczeniem rozważanych modeli. Projekt skupia się na następujących głównych kierunkach:

- Znormalizowane stany podstawowe i związane dla nieliniowych równań Schrödingera,
- Układy sprzężonych równań eliptycznych i ich znormalizowane rozwiązania,
- Znormalizowane problemy w elektrostatycznej teorii Borna–Infelda, wynikające z nieliniowej elektrodynamiki,
- Ortonormalne rozwiązania równań eliptycznych opisujących układy fermionowe, takie jak elektrony, neutrony czy protony,
- Znormalizowane rozwiązania w dziedzinach ograniczonych, inspirowane modelami propagacji wiązek laserowych CW w światłowodach z pustym rdzeniem.

Nasze podejście badawcze łączy narzędzia z wielu dziedzin analizy matematycznej. W szczególności stosujemy i rozwijamy takie techniki jak: teoria spektralna operatorów eliptycznych, teoria regularności równań eliptycznych, metody wariacyjne, lemat o przełęczy górskiej, czy teoria stopnia topologicznego.

Podsumowując, projekt znajduje się na styku kilku obszarów matematyki: metod wariacyjnych, równań różniczkowych cząstkowych, analizy funkcjonalnej i widmowej, metod topologicznych oraz fizyki matematycznej. Oczekiwane rezultaty mają na celu pogłębienie zrozumienia złożonych modeli fizycznych — takich jak te występujące w optyce nieliniowej i kondensatach kwantowych — oraz wspomaganie rozwoju bardziej wydajnych metod numerycznych do analizy tych równań. Spodziewamy się uzyskania nowych wyników istnienia rozwiązań przy ograniczeniach oraz opracowania nowych technik wariacyjnych. Co więcej, metody rozwijane w ramach tego projektu mogą znaleźć zastosowanie także w szerszej klasie nieliniowych równań różniczkowych cząstkowych, w tym nieliniowych równań falowych, układach konkurujących gatunków w modelach interakcji międzygatunkowych, a także w problemach nielokalnych. Ostatecznie przewidujemy, że uzyskane wyniki przyczynią się do dalszego rozwoju badań nad dynamiką równań ewolucyjnych zależnych od czasu.