

Polonizowalność analitycznych relacji równoważności i uogólniona analiza Scotta

Mateusz Lichman

Badania matematyczne najczęściej kojarzą nam się z zastosowaniami matematyki w różnych innych dziedzinach nauki i techniki. Matematyka może służyć nam do modelowania zjawisk i procesów, znajdowania optymalnych rozwiązań. Takie matematyczne rozważania przeprowadzane są w ramach rozmaitych struktur matematycznych. I tak na przykład czas opisujemy za pomocą prostej rzeczywistej, sieci komputerowe lub logistyczne to dla matematyków po prostu grafy, a rozwiązań równań różniczkowych szukamy w pewnych przestrzeniach Sobolewa. Z punktu widzenia matematyki teoretycznej interesujące są własności tych abstrakcyjnych struktur badane w oderwaniu od rzeczywistych zjawisk, które są za ich pomocą opisywane. To właśnie *abstrakcja* pozwala nam rozwiązywać realne problemy za pomocą teoretycznych narzędzi.

Aby organizować badania takich abstrakcyjnych struktur, niezwykle przydatnym jest pojęcie izomorfizmu (gr. *isos* – równy, *morphe* – kształt). Nieformalnie: dwie struktury tego samego typu (np. dwie grupy) nazwiemy *izomorficznymi*, jeśli z punktu widzenia teorii danego typu (np. teorii grup) są nierozróżnialne. Na przykład skończona grupa liczb całkowitych $\{0, 1, \dots, 10, 11\}$ z dodawaniem modulo 12 jest izomorficzna z multiplikatywną grupą zespolonych pierwiastków równania $x^{12} = 1$. Za pomocą takiej grupy możemy na przykład opisać upływ godzin na tarczy zegara, ale używamy tego typu grup również i do bardziej skomplikowanych zastosowań (np. w bankowości używamy arytmetyki modulo 97 do wykrywania błędów w numerach kont IBAN).

W zależności od tego, jakie struktury rozważamy, różnią się też pojęcia izomorfizmu. Innym obiektem matematycznym jest relacja izomorfizmu grup, a innym relacja izomorfizmu przestrzeni Banacha. Badania, które prowadzimy, dotyczą klasyfikacji relacji równoważności (w szczególności relacji izomorfizmu) za pomocą

(i) *niezmienników*,

np. abstrakcyjne struktury takie jak skończenie generowane grupy abelowe są klasyfikowane co do izomorfizmu poprzez całkiem nieskomplikowane obiekty: skończone ciągi liczb całkowitych (Twierdzenie Frobeniusa i Stickelbergera, 1878);

(ii) *borelowskiej redukowalności*,

która pozwala porządkować relacje według ich (odpowiednio zdefiniowanego) poziomu skomplikowania.

Mówiąc bardziej precyzyjnie, nasze badania dotyczą własności polonizowalnych (ang. *polishable*) relacji równoważności, pojęcia wprowadzonego przez S. Soleckiego. Dla polonizowalnej relacji równoważności istnieje pewna procedura aproksymująca tę relację. Podobne procedury są produktem uogólnionej analizy Scotta dla relacji równoważności zadanych przez ciągłe działania grup polskich oraz dla relacji izomorfizmu ośrodkowych struktur metrycznych ustalonego języka. Chcemy zbadać dokładny związek między tymi pojęciami. Ponadto chcemy zbadać polonizowalność pewnej relacji, dla której nie są spełnione założenia umożliwiające uogólnioną analizę Scotta. Pozytywna odpowiedź na to pytanie wskazywałaby na większą niż w przypadku analizy Scotta uniwersalność procedury zdefiniowanej przez polonizowalność. Innym celem jest ustalenie, czy relacje polonizowalne klasyfikują się przez relacje orbit ciągłych działań grup polskich.