

Celem projektu jest zbadanie powiązań między topologią a dynamiką na poziomie kombinatorycznym, aby znacząco wzmocnić narzędzia analizy danych topologicznych z jednej strony i dostarczyć metody automatycznej analizy numerycznej w dynamice z drugiej strony. Aby wyjaśnić naszą motywację i cele, musimy przypomnieć pewne fakty z historii matematyki wraz z ich stosownością i niedociągnięciami w odniesieniu do obecnych potrzeb nauki i technologii.

Odkrycie rachunku różniczkowego przez Leibniza i Newtona w drugiej połowie XVII wieku umożliwiło sformułowanie wielu problemów w dynamice w postaci równań różniczkowych indukowanych przez pola wektorowe. Niestety, takich równań na ogół nie da się rozwiązać analitycznie. Chociaż metody numeryczne dostarczają przybliżonych rozwiązań w skończonych przedziałach czasu, nie można ich użyć do przewidywania długoterminowego (asymptotycznego) zachowania układu. Jak wykazał Henri Poincaré pod koniec XIX wieku, dotyczy to w szczególności równań rządzących mechaniką nieba. Szukając lekarstwa, Poincaré wynalazł to, co dziś nazywamy topologią, gałąź matematyki badającą kształt obiektów geometrycznych. Silne powiązania między topologią a dynamiką są szczególnie widoczne w teorii Morse'a, fundamentalnej teorii topologii różniczkowej skonstruowanej w pierwszej połowie XX wieku przez Marstona Morse'a. W teorii Morse'a bada się gładką funkcję o wartościach rzeczywistych na rozmaitości różniczkowej. Z jednej strony ta funkcja ujawnia cechy geometryczne rozmaitości poprzez zbiory podpoziomów funkcji. Z drugiej strony generuje gradientowe pole wektorowe i potok na rozmaitości. Teoria Morse'a ujmuje powiązania między geometrią rozmaitości a dynamiką potoku.

Teoretycznie teoria Morse'a jest użyteczna zarówno w topologii, jak i dynamice, ale nie prowadzi do narzędzi algorytmicznych, które mogłyby skorzystać z tych powiązań. Dzieje się tak, ponieważ algorytmy działają na strukturach skończonych, podczas gdy klasyczna teoria Morse'a wymaga rozmaitości różniczkowalnej. Wyjątkiem jest tutaj wariant teorii Conleya, stanowiący istotne uogólnienie teorii Morse'a. Jedną z wersji tej teorii opiera się na homologii, jednym z głównych narzędzi w topologii algebraicznej. Algorytmiczne obliczenia homologii, chociaż na ogół nie są zbyt wydajne, są możliwe i w połączeniu ze ścisłymi obliczeniami numerycznymi przy użyciu arytmetyki przedziałowej mogą być wykorzystane do uzyskania wspomaganych komputerowo dowodów asymptotycznego opisu dynamiki równania różniczkowego. Od początku XXI wieku liczba takich dowodów stale rośnie. Jednak aby taki dowód się powiódł, należy odpowiednio dobrać kilka parametrów, a osiąga się to poprzez wiele godzin eksperymentów numerycznych wymagających ludzkiej wiedzy i cierpliwości. Poszukiwanie zautomatyzowanej metody komputerowej analizy układu dynamicznego jest częścią niniejszego projektu. Taka zautomatyzowana metoda musiałaby dobrze łączyć się z narzędziami topologicznymi. Aby to osiągnąć, wymagany jest kombinatoryczny odpowiednik pola wektorowego. Taki odpowiednik w postaci kombinatorycznego pola wektorowego został zaproponowany przez Robina Formana pod koniec XX wieku, jako część jego pracy nad czysto kombinatoryczną wersją teorii Morse'a. Później został uogólniony do koncepcji kombinatorycznego pola wielowektorowego, lepiej dostosowanego do potrzeb modelowania ogólnych równań różniczkowych.

Potrzeba kombinatorycznego odpowiednika układu dynamicznego jest jeszcze silniej widoczna w analizie próbkowanych układów dynamicznych, to jest układów dynamicznych znanych tylko ze skończonych próbek zebranych z obserwacji lub eksperymentów, gdy nie ma dostępnego wiarygodnego modelu matematycznego. Jest to związane z naszą szybko rosnącą zdolnością do zbierania ogromnych ilości danych, zarówno o charakterze statycznym, jak i dynamicznym. W ujęciu geometrycznym zbiory danych tworzą chmurę punktów w przestrzeni wielowymiarowej. Chmura aproksymuje zamkniętą hiperpowierzchnię w przestrzeni, a topologia tej hiperpowierzchni dostarcza użytecznych wskazówek, jakie informacje są ukryte w danych. Bardzo skutecznym narzędziem w analizie danych topologicznych są homologie persystentne zaproponowane przez kilku autorów na przełomie XX i XXI wieku. Homologie persystentne zbierają czasy narodzin i śmierci cech topologicznych w formie diagramu persystencji lub kodu kreskowego. Informacje zebrane na diagramie persystencji są następnie wykorzystywane do rozróżniania chmur punktów. Wydaje się jednak, że znacznie głębszy wgląd w geometrię chmury punktów jest możliwy. Jednym z wyników poprzedniego projektu była obserwacja, że homologie persystentne mogą być postrzegane jako forma kombinatorycznej teorii Morse'a zaproponowanej przez Formana. Ta obserwacja tworzy platformę do przenoszenia narzędzi topologicznych w dynamice do analizy danych topologicznych nie tylko w kontekście danych dynamicznych, ale także dla ogólnych chmur punktów zbierających dane statyczne.

Zebrane w ten sposób informacje ujawniłyby kształt chmury punktów bezpośrednio, poprzez stabilne i niestabilne rozmaitości zbiorów niezmienniczych dynamiki gradientowej, a nie opierałyby się jedynie na czasach narodzin i śmierci. Aby to osiągnąć, trzeba zbudować odpowiednią teorię na bazie tego, co aktualnie jest jedynie obserwacją. Taka teoria jest jednym z głównych celów niniejszego projektu.