

Wymierne grupy homotopii w analizie geometrycznej

Adam Grzela

W fizyce złożone systemy są często opisywane za pomocą wielkości, które odzwierciedlają pewne cechy układu — takie jak masa, ładunek, energia potencjalna lub kinetyczna. Zazwyczaj wyrażają one pewien stopień złożoności układu, tj. ile czegoś jest lub jak szybko się porusza czy zmienia. Ostatnia z tych wielkości — energia — jest kluczowa dla współczesnych sformułowań fizyki matematycznej. Łatwo ją opisać w prostych systemach mechanicznych — problemem są subtelniejsze zjawiska, takie jak pola elektromagnetyczne lub grawitacyjne. Niemniej jednak, w przypadku pola elektrycznego $\mathcal{E} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ o potencjale $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, energię $\mathcal{E}$ w pewnym obszarze Ω definiuje się jako średnią z kwadratu szybkości zmiany potencjału:

$$E(\Phi) = \int_{\Omega} |\nabla \Phi|^2. \quad (1)$$

Warto zauważyć, że to faktycznie mierzy, jak „skomplikowane” jest pole: zerowa energia odpowiada stałemu potencjałowi (a zatem brakowi pola), podczas gdy wysoka energia wskazuje na bardzo zmienny potencjał i pole.

W przypadku bardziej zaawansowanych modeli fizycznych, takich jak model Skyrme-Faddeeva w fizyce ciała stałego i magnetyzmie lub pewnych teoretycznych opisów ciekłych kryształów, można również zdefiniować inne, *topologiczne* miary złożoności. Jako przykład rozważmy potencjał na płaszczyźnie, który przyjmuje wartości na sferze jednostkowej $\mathbb{S}^2$, zwanej również przestrzenią stanów lub docelową. Narzucając pewną regularność „w nieskończoności”, Φ można postrzegać jako przekształcenie z uzwarcenia, co daje $\Phi : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$. W przypadku takiego odwzorowania można zdefiniować jego stopień topologiczny $\deg \Phi$, który, mówiąc ogólnie, zlicza, ile razy sfera w dziedzinie pokrywa sferę docelową — traktując Φ jako „nawinięcie” jednej sfery na drugą.

To jest, ponownie, użyteczna miara złożoności: przekształcenie o stopniu zerowym jest podobne do funkcji stałej, podczas gdy wysoki stopień topologiczny wskazuje, że potencjał zmienia się znacząco. Warto zauważyć, że ten niezmiennik przyjmuje tylko wartości całkowite, wykazując w ten sposób formę „kwantyzacji”.

Ten projekt bada, czy wielkości mierzące złożoność topologiczną i analityczną potencjału — takie jak stopień i energia opisane powyżej — są powiązane, a jeśli tak, jaka jest natura tego związku. W obecnym przykładzie, stopień topologiczny danego odwzorowania można powiązać z jego energią za pomocą następującej nierówności:

$$|\deg \Phi| \leq \frac{1}{8\pi} \int_{\mathbb{S}^2} |\nabla \Phi|^2. \quad (2)$$

Takie oszacowanie jest możliwe dzięki głębokiemu wynikowi z topologii algebraicznej znanemu jako twierdzenie Sullivana. Łączy wymiarny (lub rzeczywisty) typ homotopii przestrzeni docelowej (tj. różne uogólnione stopnie topologiczne) z algebrą form różniczkowych tej przestrzeni, umożliwiając oszacowanie analityczne. Dokładniej, poprzedni przykład wykorzystuje związek między rzeczywistym typem homotopii $\pi_2(\mathbb{S}^2) \otimes \mathbb{R}$ reprezentowanym przez $\deg$, a algebrą gładkich form różniczkowych na $\mathbb{S}^2$, przestrzeni docelowej.

Istnieją daleko idące uogólnienia tej procedury: dla różnych przestrzeni docelowych można rozważyć różne uogólnione stopnie wynikające z ich rzeczywistego typu homotopii i ich związki z różnymi pojęciami energii. Właściwym pojęciem jest tutaj p -energia dla różnych wartości p :

$$E_p(\Phi) = \int_{S^p} |\nabla \Phi|^p. \quad (3)$$

W pionierskich pracach Novikova i Hardta-Rivière’a zaproponowano stosunkowo prostą procedurę uzyskiwania szacunków analitycznych dla jednospójnych rozmaitości. Plan tego projektu polega na zbadaniu, dla których przestrzeni docelowych możemy rozszerzyć tę procedurę. W szczególności można zapytać, czy takie lub podobne procedury można zdefiniować dla CW-kompleksów — bogatej klasy obiektów uzyskanych przez „sklejanie” komórek o różnych wymiarach. Ważnym przykładem jest tutaj bukiet rozmaitości — przestrzeń skonstruowana przez połączenie dwóch lub więcej przestrzeni w jednym punkcie. Nawet proste przykłady, takie jak $\mathbb{S}^n \vee \mathbb{S}^n$, mają już nowe nietrywialne rzeczywiste niezmienniki homotopii w porównaniu z klasycznym $\mathbb{S}^n$.

Wyniki tego projektu mogą pomóc w zrozumieniu zagadnień z zakresu fizyki (np. istnienie tzw. solitonów topologicznych) i analizy (np. słaba aproksymowalność przekształceń Sobolewa). Ponadto relacje pomiędzy własnościami topologicznymi i analitycznymi funkcji można wykorzystać do znalezienia topologicznych kontrprzykładów dla problemów analizy matematycznej i równań różniczkowych.