

Celem projektu jest stworzenie matematycznej teorii dla zrozumienia podstawowych własności kilku modeli z przetwarzania obrazów oraz fizyki ciała stałego. Pod względem matematyki, będziemy analizować pewne problemy optymalizacyjne z zakresu rachunku wariacyjnego, oraz związane z nimi ewolucyjne równania różniczkowe cząstkowe (RRCz).

Wspólną cechą rozważanych problemów jest silna degeneracja i/lub osobliwość, prowadzące do bardzo ograniczonej regularności rozwiązań. Zazwyczaj oczekuje się, że będą one jedynie *funkcjami o ograniczonym wahanii* (*bounded variation*, BV). W szczególności mogą mieć skokowe nieciągłości. W kontekście modelowania jest to pożądane—odpowiada to ostrym konturom na obrazach lub granicom ziaren w polikryształach.

Jednak z punktu widzenia analizy matematycznej jest to trudność. Jak każdy, kto uczestniczył w kursie rachunku różniczkowego pierwszym roku studiów wie, funkcje nieciągłe nie mogą być różniczkowalne! Dlatego pochodne pojawiające się w badanych równaniach różniczkowych należy rozumieć w nieklasycznym, słabym sensie. Ta potrzeba ostrożnego definiowania i obchodzenia się z rozważanymi obiektami matematycznymi jest wszechobecną cechą tego projektu i jednym z powodów, dla których wiele pytań, które planujemy zbadać, pozostaje nierozwiązanych.

Planujemy zaatakować kilka różnorodnych problemów. Dwa z nich dotyczą dobrego postawienia pewnych ewolucyjnych równań różniczkowych cząstkowych. To znaczy, pytamy, czy istnieje rozwiązanie równania (i w jakim sensie) i czy jest tylko jedno. Jest to fundamentalne pytanie w analizie równań różniczkowych, bez którego badanie dalszych właściwości nie ma sensu. Rozważane RRCz to:

- *1-harmoniczny potok przekształceń*, model odsumiania danych z więzem na pewnej powierzchni, takich jak składowa koloru obrazu, dane orientacji obiektów lub dane obrazowania tensora dyfuzji;
- niedawno formalnie wyprowadzony model Liu-Lu-Margetis-Marzuola fluktuacji termodynamicznych na powierzchniach kryształów, który ma bardzo nowatorską strukturę z matematycznego punktu widzenia.

Chcemy również zbadać uproszczoną wersję tego ostatniego, *potok całkowitego wahanii czwartego rzędu*, który również został zaproponowany jako model odsumiania. Interesuje nas na przykład pytanie, czy ten potok jest w stanie zachowywać kształt obiektów na obrazie.

Inna klasa problemów, którą będziemy rozważać, dotyczy pewnych funkcjonałów, tj. odwzorowań ze zbioru funkcji w liczby. Podstawowym problemem jest zdefiniowanie interesujących funkcjonałów w odpowiedni sposób na funkcjach BV i pokazanie, że funkcjonały te osiągają swoje wartości minimalne. Jest to fundamentalne zadanie w rachunku wariacyjnym. Planujemy je wykonać dla

- *całkowitego wahanii ze zmiennym wzrostem*, które zostało zaproponowane jako człon regularyzujący dla adaptacyjnego modelu odsumiania;
- wariantu funkcjonału na transformacjach między dwoma danymi obrazami zaproponowanego przez Balla i Hornera jako miara podobieństwa między obrazami w widzeniu komputerowym.