

Geometria algebraiczna to dział matematyki zajmujący się badaniem różnorodności algebraicznych, czyli zbiorów rozwiązań układów równań wielomianowych. Jej korzenie sięgają starożytnej greckiej geometrii skupionej na prostych i stożkowych, jednak na przestrzeni wieków ewoluowała, obejmując znacznie bardziej złożone obiekty i zaawansowane metody. Centralnym wyzwaniem w geometrii algebraicznej pozostaje klasyfikacja różnorodności algebraicznych, do której podchodzi się z dwóch perspektyw:

- Rozwijanie niezmienników umożliwiających rozróżnienie między różnorodnościami. Wymaga to często abstrakcyjnych koncepcji, takich jak kategorie pochodne – pojęcie wprowadzone przez Grothendiecka w ramach algebry homologicznej.
- Konstrukcje różnorodności o określonych niezmiennikach lub wyróżniających się właściwościach, co określa się mianem geometria algebraiczna konkretna.

Niniejszy projekt bada interakcje pomiędzy klasyczną geometrią algebraiczną, a nowoczesnym podejściem opartym na kategoriach pochodnych. Integrując klasyczne techniki ze współczesnymi metodami, badania mają na celu dostarczenie zarówno teoretycznych wglądów, jak i praktycznych narzędzi do zrozumienia geometrii różnorodności poprzez ich kategorie pochodne. Szczególny nacisk kładziemy na badanie informacji zakodowanej w kategorii pochodnej różnorodności oraz operacji geometrycznych indukujących równoważności kategorii pochodnych.

W kontekście ogólnej klasyfikacji minimalnych różnorodności, wyróżnia się trzy klasy: różnorodności typu Fano, typu Calabi-Yau i typu ogólnego. Centralny wpływ na badanie kategorii pochodnych jako niezmiennika różnorodności jest twierdzenie o rekonstrukcji Bondala-Orlova. Głosi ono, że kategoria pochodna dowolnej różnorodności Fano, jak również dowolnej różnorodności typu ogólnego, jednoznacznie określa tę różnorodność. Wynik ten wyróżnia klasę różnorodności typu Calabi-Yau, które w klasyfikacji różnorodności plasują się niejako pomiędzy różnorodnościami Fano, a różnorodnościami typu ogólnego. W przeciwieństwie jednak do tych klas, dwie różne różnorodności typu Calabi-Yau mogą dzielić tę samą kategorię pochodną, co sprawia, że badanie równoważności pochodnych jest nierozzerwalnie związane z ich teorią. Funktory wiążące dwie kategorie różnych różnorodności nazywane są transformatami Fourier-Mukai.

Znaczenie różnorodności typu Calabi-Yau wykracza poza ich rolę w problemie klasyfikacji. Te naturalne obiekty geometryczne pojawiają się w różnych obszarach matematyki i fizyki teoretycznej, szczególnie w teorii strun, gdzie modelują wszechświat. Teoria strun zakłada, że wszechświat jest rozwłókniony przez mikroskopijne, trójwymiarowe zespolone różnorodności Calabi-Yau, w których drgają struny. Wzorce drgań tych strun na różnorodnościach Calabi-Yau determinują obserwowane cząstki, co czyni badanie różnorodności Calabi-Yau kluczowym dla zrozumienia modeli wszechświata opartych na teorii strun. Współdziałanie teorii różnorodności Calabi-Yau z teorią strun wygenerowało wiele hipotez w matematyce, inspirowanych ich znaczeniem fizycznym. Jedną z najbardziej wyróżniających się jest hipoteza symetrii lustrzanej. Matematycznie postuluje ona, że różnorodności Calabi-Yau istnieją w parach o zamienionych pewnych strukturach. Chociaż niektóre formy tej hipotezy zostały udowodnione dla prostszych przypadków, takich jak przecięcia zupełne w różnorodnościach torycznych, pozostaje ona otwartym pytaniem dla bardziej ogólnych klas. Związek między symetrią lustrzaną a teorią kategorii dostarczył nowych interpretacji i narzędzi do zajęcia się tym zagadnieniem. W szczególności, pary różnorodności Calabi-Yau o równoważnych kategoriach pochodnych wykazują tak uderzające podobieństwa, że przewiduje się, iż dzielą ten sam „lustrzany odpowiednik”. Obserwacja ta kwestionuje tradycyjne rozumienie symetrii lustrzanej jako symetrii i motywuje głębsze badania, które stanowią centralny element naszych badań.

Projekt podejmuje kilka istotnych i wymagających problemów na styku geometrii i kategorii pochodnych:

- Badanie zmian kategorii pochodnych w kontekście przekształceń biwymiernych, operacji zmieniających tylko niewielką część różnorodności, pozostawiając resztę niezmienną.
- Konstrukcja niebiwymiernych różnorodności o równoważnych kategoriach pochodnych.
- Opracowanie kryteriów równoważności kategorii pochodnych w przypadku wybranych różnorodności typu Calabi-Yau, w szczególności różnorodności hiper-Kählerowskich.
- Wykorzystanie równoważności kategorii pochodnych do konstrukcji różnorodności hiper-Kählerowskich, rzucając światło na tych enigmatycznych członków rodziny Calabi-Yau.
- Porównywanie różnorodności poprzez pojęcia związane z kategoriami pochodnymi, poszerzając zrozumienie ich relacji i klasyfikacji.

To kompleksowe podejście ma na celu zbliżenie klasycznej geometrii i nowoczesnych technik, oferując innowacyjne ścieżki zarówno dla eksploracji teoretycznej, jak i konkretnych zastosowań.