

WOKÓŁ TWIERDZENIA SZEMERÉDIEGO

STRESZCZENIE POPULARNONAUKOWE

Jaki będzie następny wyraz ciągu 6, 13, 20, 27? Tego typu pytania służą do sprawdzenia umiejętności wykrywania wzorców; z tego powodu są często używane do testowania zdolności matematycznych. W powyższym przykładzie każdy kolejny wyraz jest większy o 7 od poprzedniego - stąd następnym wyrazem będzie 34. Ciągi tej postaci, w których różnica między kolejnymi wyrazami jest stała, nazywane są *ciągami arytmetycznymi*.

Poszukiwanie konfiguracji takich jak ciągi arytmetyczne w podzbiorach liczb naturalnych jest podstawowym zadaniem działu czystej matematyki nazywanego *kombinatoryką addytywną*. Wiadomo, że wszystkie odpowiednio duże podzbiory liczb naturalnych zawierają ciąg arytmetyczny o dowolnej długości; w rzeczywistości zawierają mnóstwo takich konfiguracji. Twierdzenie to zostało udowodnione w latach 70-tych XX w. przez Szemerédiego i stanowi podwaliny kombinatoryki addytywnej. Twierdzenie Szemerédiego, choć pierwotnie zostało udowodnione metodami teorii grafów, doczekało się dotychczas blisko 20 różnych dowodów z wykorzystaniem technik z różnych dziedzin matematyki. Matematycy od dawna zdają sobie sprawę z tego, jak ważną rolę twierdzenie Szemerédiego odgrywa w różnych dziedzinach matematyki - z tego właśnie powodu Terence Tao określił je jako "kamień z Rosetty" matematyki. Narzędzia wypracowane przy różnych dowodach twierdzenia Szemerédiego odegrały ważną rolę w wyprowadzeniu jego wielu dalekosiężnych uogólnień. Dzięki temu wiemy o wielu innych typach konfiguracji, które występują w każdym odpowiednio dużym podzbiorze liczb naturalnych, całkowitych, pierwszych i innych ważnych matematycznych zbiorów.

Projekt ten ma wiele celów dalece wykraczających poza twierdzenie Szemerédiego i powiązane wyniki. Jednym z nich jest wykrycie nowych konfiguracji w *nieskończonych* podzbiorach liczb całkowitych. Kolejnym celem jest zrozumienie, jak duże mogą być *skończone* podzbiory liczb całkowitych pozbawione pewnych naturalnych konfiguracji. Do problemów tych można podejść poprzez badanie *struktury* i uzyskanie *oszacowań* dla powiązanych operatorów wieloliniowych, mających swoje źródło czy to w kombinatoryce addytywnej, czy w teorii ergodycznej. Zrozumienie właściwości analitycznych takich operatorów, w tym tego, czy *zbiegają*, a jeśli tak, to do jakiej *granicy*, to kolejny cel tego projektu. Problemy te leżą u podstaw bardzo aktywnego programu badawczego w zakresie kombinatoryki, dynamiki, analizy i teorii liczb, a postęp w rozwiązaniu któregośkolwiek z nich pozwoli nam lepiej zrozumieć strukturę dużych zbiorów i zawartych w nich wzorców.