Streszczenie popularnonaukowe

Badamy zagadnienia związane z ciągami liczbowymi i szeregami potęgowymi powstającymi w różnych dziedzinach nauki, jak np. informatyka, logika, kombinatoryka i algebra. Najpopularniejszy przykład to *ciąg Fibonacciego*:

$$f_{n+1} = f_n - f_{n-1}, \quad f_0 = 0, f_1 = 1. \tag{1}$$

Czy mając dwa ciągi f_n, g_n możemy zdecydować (za pomocą algorytmu/programu), czy $f_n = g_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$? Pytanie to nosi nazwę „problem równoważności" i jest jednym z głównych tematów tego projektu. Ma zastosowanie w teorii automatów (czy dwa automaty rozpoznają ten sam język?), teorii sterowania (czy trajektorie dwóch układów dynamicznych są takie same?), oraz algebrze komputerowej (czy dwa skomplikowane wyrażenia reprezentują tę samą wielkość?).

Innym ważnym dla nas zagadnieniem jest problem *niezmienników*. Na przykład ciąg $f_n = (-1)^n$ spełnia niezmiennik $f_n^2 = 1$. Czy możemy znaleźć (skończoną reprezentację) *wszelkich* niezmienników spełnianych przez takie ciągi? (Niezmienniki uogólniają równoważność, ponieważ $f_n = g_n$ jest niezmiennikiem.) Niezmienniki odgrywają kluczową rolę w fizyce, ponieważ zapewniają głęboki wgląd w system, często w postaci *praw zachowania*: wielkości, które nie zmieniają się podczas obliczeń, mogą mieć głębokie znaczenie fizyczne.

Istnieje wiele sposobów opisu ciągów liczbowych. Pokazaliśmy najprostszy sposób definiowania kolejnej wartości f_{n+1} według pewnej reguły w zależności od poprzednich f_n, f_{n-1}, itd... Dobierając odpowiednio formę tych zależności możemy reprezentować znane z kombinatoryki ciągi, np. *liczby Catalana* $C_{n+1} = C_nC_0 + C_{n-1}C_1 + \cdots + C_nC_0$, *liczby Bell'a* $B_{n+1} = \binom{n}{0}B_0 + \binom{n}{1}B_1 + \cdots + \binom{n}{n}B_n$, i wiele innych. Kiedy już mamy różne klasy ciągów, możemy zadać pytania takie jak: Czy każdy ciąg zdefiniowany jak Fibonacci można również zdefiniować jak kataloński (tak)? I odwrotnie (nie)? Ogólnie rzecz biorąc, jest to przykład *problemu należenia* (ang. *membership problem*): czy dany ciąg można zdefiniować także w inny sposób? Problem ten jest ważny, ponieważ jego algorytmicznie rozwiązanie pociąga za sobą głębsze zrozumienie tego, co jest konieczne do rekurencyjnego zdefiniowania ciągu.

Ciągi liczbowe powstają również w logice. Przykładowo za pomocą formuły z logiki φ możemy opisać właściwości struktur skończonych, np. „dana struktura składa się z ciągu elementów, a ich położenie powiązane jest relacją równoważności". Z φ możemy skonstruować ciąg f_n^φ (tzw. *ciąg Specker'a*), który zlicza struktury n-elementowe spełniające φ. Możemy teraz zapytać, czy $f_n^\varphi = B_n$ (tak), co jest bardzo nietrywialnym pytaniem. Ponieważ równoważność ciągów Specker'a jest w ogólności *nierozstrzygalna* (tj. nie ma algorytmu, który mógłby rozwiązać ten problem), w projekcie skupimy się na ograniczeniach, w ramach których można ominąć tę przeszkodę.

Ciągi liczbowe f_n można uogólnić za pomocą *języków ważonych* f_w, gdzie w jest ciągiem symboli, np. $w = aaba$. Języki ważone mogą być traktowane jako semantyka pewnych modeli obliczeniowych, np. automatów ważonych (uogólniających Fibonacciego), gramatyk (uogólniających języka katalońskiego) i innych. Problemy równoważności, niezmienników, przynależności i inne można uogólnić na języki ważone. Uogólnienia te często prowadzą do trudnych i długo nierozwiązanych problemów otwartych.

Interesuje nas nie tylko to, czy dany problem jest rozstrzygalny, ale także jaka jest jego *złożoność obliczeniowa*, tj. zasoby niezbędne (dla problemu) i wystarczające (dla algorytmu) z punktu widzenia czasu i pamięci.

Reasumując, jest to projekt o charakterze głównie teoretycznym. Naszym ogólnym celem jest zrozumienie rozstrzygalności i złożoności obliczeniowej problemu równoważności klas ciągów liczbowych i szeregów potęgowych pojawiających się w informatyce, logice, kombinatoryce, fizyce, układach dynamicznych i algebrze. Rodzi to wiele problemów otwartych, które zamierzamy zbadać.