Podstruktury w obiektach kombinatorycznych w ujęciu deterministycznym i losowym (streszczenie popularnonaukowe)

Zasadniczym celem projektu jest dokonanie dalszego postępu w znajdowaniu i wyznaczaniu wielkości pewnych „lepiej zorganizowanych" podstruktur takich kombinatorycznych obiektów, jak permutacje, słowa nad skończonym alfabetem, grafy i hipergrafy. W ramach projektu rozważamy cztery zadania badawcze:

#1 Podstruktury (losowych) permutacji, skojarzeń uporządkowanych i słów nad skończonym alfabetem,

#2 Własności losowo rozszerzonych grafów i hipergrafów,

#3 Tęczowe struktury w gęstych, pokolorowanych hipergrafach,

#4 (Semi)-losowe procesy hipergrafowe.

Wszystkie zadania leżą w głównym nurcie współczesnej kombinatoryki i mają długą historię sięgającą stu lat wstecz i zainicjowaną twierdzeniami Ramsey'a i Turána dla grafów oraz hipergrafów, twierdzeniem Erdősa-Szekeresa o podciągach monotonicznych i, dużo wcześniej, twierdzeniem Thuego konstruującego słowa ternarne niezawierające kwadratów. Wielu innych sławnych matematyków zajmowało się tymi problemami, a wsród nich najważniejsi to Alfred Rényi, Béla Bollobás, Endre Szemerédi i Noga Alon.

W ramach zadania badawczego #1 skupimy się na jednorodnych podciągach i bliźniętach (tzn. parach rozłącznych, izomorficznych podciągów) w permutacjach, skojarzeniach uporządkowanych i słowach nad skończonym alfabetem. Planowane wyniki na temat podciągów jednorodnych są analogiczne do twierdzenia Erdősa-Szekeresa. Z kolei szukanie bliźniaczych obiektów w strukturach matematycznych ma długą i bogatą tradycję sięgającą geometrycznych problemów dysekcji, w tym sławnego paradoksu Banacha-Tarskiego. Ogólnie, problem polega na podzieleniu danej struktury (lub pary struktur) na jak najmniej (par) izomorficznych podstruktur. Tutaj chcemy odpowiedzieć na pokrewne pytanie: jak duże izomorficzne, rozłączne podstruktury można znaleźć w danej strukturze?

Drugie zadanie badawcze jest poświęcone badaniom losowo rozszerzonych hipergrafów, względnie nowej ale „gorącej" tematyki, która interpoluje pomiędzy grafami losowymi i zagadnieniami ekstremalnymi, dwoma ważnymi gałęziami współczesnej teorii grafów. Taka mieszanka detreministycznych i losowych struktur wydaje się być fascynującym obiektem badań z dużym potencjałem aplikacyjnym. Chcielibyśmy wyznaczyć całe spektrum zachowań tego modelu dla dwóch własności grafowych: występowania wysokich potęg cyklu Hamiltona i pokryć klikami.

W zadaniu badawczym #3, tęczowe analogie problemów Turána i Diraca mogą być interpretowane jako miara odporności pewnych własności grafów na, odpowiednio ograniczone, kolorowania krawędzi. Ta gałąź teorii grafów rozwija się gwałtownie w ostatnich latach. Naszym celem jest wyznaczenie tęczowych liczb Turána dla pewnych klas grafów, takich jak ścieżki i cykle. Chcielibyśmy też potwierdzić popularną hipotezę głoszącą, że w wersji tęczowej progi Diraca pozostają asymptotycznie niezmienione.

W końcu, w ramach zadania badawczego #4, zamierzamy badać losowe procesy hipergrafowe z ograniczeniami, które stanowią bardziej wyrafinowane, a jednocześnie bardziej zorientowane na zastowowania praktyczne, modele ewolucji grafu losowego. Pierwszy z nich ogranicza maksymalny stopień wierzchołka, a jego początki sięgają pytania Erdősa z lat 80-tych o prawdopodobieństwo nasycenia stopni wszystkich wierzchołków. Drugi to niedawno zaproponowany semi-losowy proces, w którym graf bądź hipergraf powstaje w wyniku naprzemiennych losowych i deterministycznych kroków i tym samym zalicza się do bogatej i popularnej dziedziny gier na grafach.