

Metateoretyczne i międzyteoretyczne redukcje w podstawach matematyki

W filozoficznych badaniach nad podstawami matematyki często analizowane są rozmaite relacje redukowalności. W obecnym projekcie badamy dwie szerokie kategorie takich redukcji: redukcje metateoretyczne i redukcje międzyteoretyczne. Redukcje metateoretyczne można postrzegać jako formalizacje pewnych intuicyjnych pojęć (takich jak pojęcie liczby naturalnej, zbioru itp.) w teorii formalnej. Stanowią one redukcje pojęć nieformalnych do teorii formalnych. Redukcje międzyteoretyczne redukują jedną teorię do innej teorii formalnej. Intuicyjnie, takie redukcje jednej teorii do innej pokazują, że (pod pewnymi względami) teoria redukująca może naśladować teorię redukowaną. Istnieje wiele naturalnych przykładów takich redukcji. W ramach projektu chcemy zbadać ich status epistemiczny z perspektywy treści pojęciowej teorii.

Wiele naturalnych teorii formalnych występujących w podstawach matematyki zdaje się mieć określony przedmiot badań. Na przykład teorie arytmetyczne często są opisywane jako teorie pierwszego rzędu arytmetyki liczb naturalnych; niektóre podsystemy arytmetyki drugiego rzędu są zaprojektowane, aby uchwycić analizę liczb rzeczywistych; aksjomatyczne teorie prawdy mają na celu formalizację pojęcia prawdy używanego w rozumowaniu matematycznym i nieformalnym; teorie zbiorów to formalne teorie uchwycające nieformalne pojęcie zbioru. Redukcje metateoretyczne stwierdzają, że pewne pojęcia lub stanowiska podstawowe są redukowalne do teorii formalnej. Są one kluczowe dla formalnych badań nad podstawami matematyki: bez nich trudno byłoby określić związek między teorią formalną a (szeroko rozumianym) przedmiotem badań określonego obszaru matematyki. Dostarczają także dobrego wglądu w treść pojęciową teorii - teorie formalizujące obszar matematyki lub stanowisko filozoficzne intuicyjnie odnoszą się do pojęć używanych w tym obszarze matematyki lub stanowisku filozoficznym. Nasz projekt ma na celu filozoficzną analizę tej intuicyjnej idei i nadanie jej precyzyjnej formy.

Redukcje międzyteoretyczne są kluczowymi narzędziami w logicznej analizie formalnych teorii matematycznych. Jakie filozoficzne konsekwencje można wyciągnąć z istnienia danej redukcji między dwiema teoriami formalnymi? Naszym głównym celem w tej części projektu jest analiza tego pytania w kontekście treści pojęciowej teorii. Jak silna relacja redukowalności jest potrzebna, aby zachować treść pojęciową między teoriami? Wydaje się również, że akceptując teorię formalizującą pewne pojęcie (np. akceptując ZFC jako formalizację pojęcia zbioru), implicite zobowiązujemy się do akceptacji pojęć, które nie są explicite formalizowane przez tę teorię (np. pojęcia liczby naturalnej). Możemy więc zapytać, jak silna powinna być relacja redukowalności między teorią formalizującą jedno pojęcie a teorią formalizującą inne pojęcie, aby dać podstawę takim zobowiązaniom pojęciowym. Przypuszczalnie, docelowa relacja redukowalności powinna być stosunkowo silna. W związku z tym interesujące wydaje się pytanie o epistemiczną interpretację słabszych rodzajów redukcji między teoriami. W projekcie proponujemy interpretację pewnych naturalnych relacji redukowalności jako dobrego miernika odległości pojęciowej między teoriami.