

Metody teorii potencjału dla zagadnień nieliniowych związanych z procesami i operatorami typu Lévy'ego

Elektryczność, przepływy ciepła i migracje mogą być modelowane zarówno przez operatory typu Lévy'ego jak i procesy Markowa – najbardziej znanym przykładem jest modelowanie dyfuzji cząstek za pomocą ruchu Browna. Z tego powodu metody probabilistycznej teorii potencjału okazały się bardzo przydatne w rozwiązywaniu zagadnień typu Dirichleta w terminach procesów stochastycznych. Obecny projekt dotyczy powiązanych nieliniowych modeli matematycznych w teorii prawdopodobieństwa i teorii równań różniczkowych cząstkowych. W celu analizowania tych modeli połączymy metody probabilistyczne i deterministyczne.

Kluczowe pojęcia dla naszego projektu to tożsamości Hardy'ego–Steina, tożsamości Douglasa oraz formy Sobolewa–Bregmana. Mierzą one energię złożonych układów i jej rozpraszanie. Metody probabilistycznej teorii potencjału przyczyniły się ostatnio do znacznego postępu w badaniu tych tożsamości i form dla nielokalnych operatorów typu Lévy'ego. Pozostając w tym nurcie, zamierzamy udowodnić wzory Douglasa i Hardy'ego–Steina w nowych sytuacjach, m.in. dla rozwiązań brzegowych zagadnień parabolicznych (tj. zależnych od czasu) i eliptycznych (tj. stacjonarnych w czasie), zarówno lokalnych (tj. bez oddziaływań na odległość), jak i nielokalnych (tj. z oddziaływaniami na odległość), w tym również dla operatorów o zmiennych współczynnikach (tj. zależnych od położenia).

Formy Sobolewa–Bregmana operatorów nielokalnych prowadzą do trudnych nieliniowych problemów minimalizacyjnych, które planujemy analizować w ramach tego projektu. Oczekujemy wyników dla ciągłych i dyskretnych przestrzeni stanów. Będziemy również badać (za pomocą metod analitycznych) nieliniowe nierówności multiplikatywne dla operatorów eliptycznych drugiego rzędu w formie niedywergencyjnej oraz odpowiadające im semiliniowe zagadnienia brzegowe.

Wyniki uzyskane w przypadku parabolicznym będą istotne dla modeli w równaniach różniczkowych cząstkowych, prawdopodobieństwie, analizie harmonicznej i analizie funkcjonalnej, na przykład dla asymptotyki układów ewoluujących w czasie. Semiliniowe równania różniczkowe eliptyczne są tematem bardzo popularnym, który został szeroko zbadany dla operatorów w postaci dywergencyjnej. Nierówności multiplikatywne umożliwią systematyczne zbadanie tych równań z operatorami w postaci niedywergencyjnej. Zbadamy również kontraktywność półgrup Feynmana–Kaca za pomocą nierówności Hardy'ego dla form Sobolewa–Bregmana.

Projekt powinien doprowadzić do uznania form Sobolewa–Bregmana za ważną alternatywę dla zwykłych form Sobolewa, a odpowiedniego operatora Eulera–Lagrange'a za ciekawą alternatywę dla p -laplasjanu. Spodziewamy się, że przyciągną one uwagę w analizie harmonicznej i równaniach różniczkowych cząstkowych, ponieważ dostarczają optymalnych narzędzi do badań zagadnień początkowych i brzegowych w przestrzeniach L^p .