

# Układy nieliniowe - nowe wyzwania

Piotr Gwiazda

Celem prowadzonych badań jest odpowiedź na nowe pytania dotyczące układów nieliniowych równań różniczkowych cząstkowych. Wiele fascynujących zjawisk fizycznych, czy biologicznych, wiąże się z głęboko nietrywialnym opisem matematycznym. Teoria Dynama Magnetohydrodynamicznego opisująca istnienie pola magnetycznego ciał niebieskich, w tym też Ziemi, to jedno ze zjawisk, które będziemy badać w ramach niniejszego projektu. Badania te związane są ze złożonym układem równań hydrodynamiki cieczy uwzględniającym pole magnetyczne, efekty termiczne, zjawisko konwekcji i ściśliwość cieczy.

Nasz program badań obejmuje też szeroko rozumiane procesy nielocalne, które opisywane są poprzez pojawienie się w równaniach hydrodynamiki członów całkowych. Tego typu opis został zaproponowany do modelowania zachowań zbiorowych w naukach społecznych i naukach o życiu i pozwala na przedstawienie bogatej różnorodności zachowań w zależności od zaproponowanych potencjałów w członach całkowych. Członem nielocalnym przyjrzymy się również w kontekście nowatorskich modeli ruchu ulicznego.

Warto zauważyć, jak szerokie spektrum zagadnień można opisać przy pomocy równań hydrodynamiki. Ten opis możliwy jest na różnym poziomie skal. Najbardziej oczywistym będzie rozróżnienie na poziom mikro-, mezo- i makroskopowy. Równie jednak ciekawe będą też obserwacje przy wzroście pewnych tylko parametrów, jak na przykład przy wysokim ciśnieniu, niskiej liczbie Macha, czy małej lepkości. Relacje między modelami uwzględniającymi różne przejścia graniczne to istotny cel badawczy pozwalający na weryfikację równań.

Środowisko naukowe zdążyło się przyzwyczaić, że nie możemy liczyć na istnienie globalnych w czasie rozwiązań klasycznych dla układów mechaniki cieczy. Dlatego też tak szeroko rozwinęły się metody analizy funkcjonalnej w celu poszukiwania słabych rozwiązań, a nieraz nawet rozwiązań w jeszcze słabszym sensie - rozwiązań o wartościach w miarach. Jednak samo istnienie rozwiązania nie jest jeszcze informacją w pełni zadowalającą. W poszukiwaniu odpowiedzi na pytanie o jednoznaczność rozwiązań szczególną uwagę skierujemy w stronę metody relatywnych entropii. Jej podstawą jest określenie, w jaki sposób zmienia się w czasie odległość dwóch rozwiązań układu równań w odniesieniu do odległości między ich danymi początkowymi. Metoda relatywnych entropii nie zawsze zapewni jednoznaczność słabych rozwiązań, ale pozwoli na wnioski o warunkowej jednoznaczności. Ponadto metoda okazuje się mieć niezwykle szerokie zastosowania. Wykorzystamy ją do badania stabilności schematów numerycznych, jak również osobliwych przejść granicznych między różnymi teoriami termomechanicznymi.

Metody słabej zbieżności to podstawowe narzędzia związane z układami nieliniowych równań różniczkowych cząstkowych. W opisie zjawisk fizycznych, biologicznych, czy procesów społecznych, to poza nielicznymi wyjątkami, nieliniowości i/lub człony nielocalne są nieuniknione. Stąd rozwój tych metod jest zdecydowanym priorytetem. Ścisła analiza modelu to punkt wyjścia do budowy poprawnych schematów numerycznych, symulacji komputerowych, a na koniec tego procesu do wyciągnięcia wniosków pomocnych w przewidywaniu i sterowaniu różnego typu zjawiskami. Właściwa predykcja procesów to możliwość zrezygnowania z kosztownych lub trudnych, a nieraz nawet niemożliwych, do wykonania eksperymentów.