Topologiczne, geometryczne i ergodyczne problemy dynamiki zespolonej

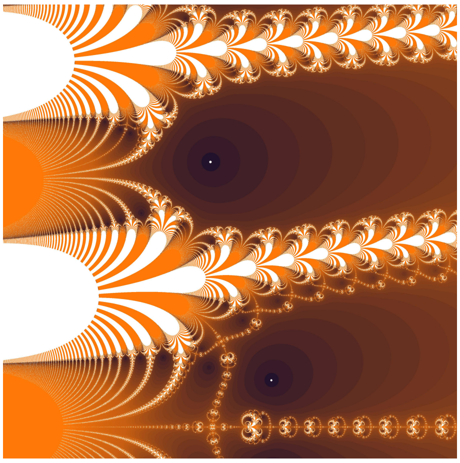
Streszczenie popularnonaukowe

Przedstawiany projekt dotyczy zagadnień dynamiki zespolonej, która jest częścią teorii *układów dynamicznych*. W teorii tej bada się ewolucję danej przestrzeni (zbioru) X w długim okresie czasu. W naszym przypadku upływ czasu modelowany jest w sposób *dyskretny* (skokowy), a zmiana układu przy przejściu od danego momentu do następnej chwili opisana jest przez przekształcenie (funkcję) $f\colon X \to X$. W ujęciu *autonomicznym* funkcja f (reguła ewolucji) nie zmienia się w czasie. W takim przypadku zmiana układu po czasie n, gdzie n jest liczbą naturalną, jest opisana przez n-tą *iterację* (n-krotne złożenie)

$$f^n = f \circ \cdots \circ f \quad (n \text{ razy}).$$

Teoria układów dynamicznych, rozwinięta w XX wieku, stała się obecnie ważną częścią współczesnej matematyki, dostarczającą narzędzi badawczych używanych w innych dziedzinach i mającą liczne zastosowania w naukach przyrodniczych i społecznych.

Przedstawiany projekt dotyczy teorii iteracji przekształceń holomorficznych zmiennej zespolonej. W tym przypadku przestrzenią X jest płaszczyzna zespolona lub sfera Riemanna, a przekształceniem f – funkcja wymierna, całkowita lub meromorficzna. Pod względem dynamicznym przestrzeń X można podzielić na dwa podzbiory – *zbiór Fatou*, gdzie iteracje przekształcenia zachowują się w sposób regularny i *zbiór Julii*, gdzie dynamika ma charakter chaotyczny. Okazuje się, że zbiór Julii jest zazwyczaj skomplikowany pod względem topologicznym i geometrycznym (patrz rysunek poniżej).



Znaczna część projektu dotyczy przypadku *przestępnego*, gdy punkt w nieskończoności jest istotną osobliwością funkcji f. W tej sytuacji zbiór Julii może zawierać niezmiennicze zbiory o złożonej strukturze, między innymi tak zwane *bukiety Cantora* lub *nierozkładalne continua* typu Knastera. W ramach projektu chcemy między innymi badać własności topologiczne i geometryczne takich zbiorów. Będziemy też badać strukturę brzegów składowych spójności zbioru Fatou i określać różne rodzaje ich wymiarów. Warto tu wspomnieć, że zbiory te często wykazują cechy *samopodobieństwa*, a także inne własności fraktalne.

Kolejna część projektu jest poświęcona *nieautonomicznej* i *losowej* dynamice holomorficznej. Dopuszczamy tu sytuację, gdy reguła opisująca ewolucję układu może zmieniać się w czasie. Wtedy zamiast jednego przekształcenia f opisującego tę ewolucję mamy do wyboru wiele różnych przekształceń. W szczególności, możemy za każdym razem wybierać to przekształcenie w sposób losowy. W ramach projektu będziemy badać między innymi, jaki wpływ ma wprowadzenie takiej losowości na strukturę i własności zbioru Julii.

Do analizy zagadnień rozważanych w projekcie, oprócz narzędzi teorii układów dynamicznych, będziemy wykorzystywać metody pochodzące z analizy zespolonej, topologii i teorii prawdopodobieństwa.