TEORIA HOMOTOPII W GEOMETRII ARYTMETYCZNEJ POPRZEZ MATEMATYKĘ SKONDENSOWANĄ

STRESZCZENIE POPULARNONAUKOWE

MARCIN LARA

W tym projekcie planujemy badać schematy, rozmaitości i przestrzenie sztywne - podstawowe obiekty geometrii algebraicznej i sztywnej, za pomocą nowych metod łączących *matematykę skondensowaną* i *wyższą teorię homotopii*.

Rozmaitości można klasycznie postrzegać jako zera układów wielomianów. Nad liczbami zespolonymi takie obiekty dają sensowne przestrzenie topologiczne (tzn. pewne dobrze zdefiniowane „kształty", które matematycy mogą badać), do których narzędzia topologii algebraicznej mogą być z powodzeniem stosowane.

Co więcej, struktura algebraiczna, w którą wyposażone są rozmaitości, nie tylko daje nam dodatkowe narzędzia do ich badania, ale pozwala też stosować podobne metody w sytuacjach, gdzie na pierwszy rzut oka jest mało lub w ogóle nie ma informacji topologicznej: na przykład nad ciałami skończonymi, to znaczy w sytuacjach, gdy ciało liczb zespolonych $\mathbb{C}$ jest zastąpione przez ciało, które zawiera tylko skończenie wiele liczb - coś w dużej mierze o naturze arytmetycznej.

Było to możliwe dzięki pomysłom sięgającym prac pioniera w tej dziedzinie - A. Grothendiecka, który znalazł sposób na zdefiniowanie „kształtu" z czysto algebraicznych danych i naśladowanie na nim technik topologii algebraicznej. Tę „sztuczną topologię" nazwano topologią *étalną*. Pozwoliło to odtworzyć pojęcia znane z topologii algebraicznej, takie jak *grupa podstawowa* (która parametryzuje „pętle" wewnątrz naszej przestrzeni) w postaci *étalnej* grupy podstawowej $\pi_1^{\text{ét}}(X)$ rozmaitości X. Późniejsze prace Artina–Mazura–Friedlandera pozwoliły zrobić to samo dla *wyższych* grup homotopii: $\pi_2, \pi_3, \ldots$.

W serii prac, Peter Scholze, wspólnie ze współpracownikami, zauważył, że praca w bardziej skomplikowanej topologii *pro*-étalnej w rzeczywistości upraszcza znaczną części teorii. Co więcej, te idee doprowadziły do narodzin tak zwanej *matematyki skondensowanej.* Podstawowe założenie tej teorii polega na rozważaniu odwzorowań z pozornie ezoterycznych (choć względnie „prostych") obiektów topologicznych - *zbiorów proskończonych* - w przestrzenie topologiczne, co w dużej mierze pozwala to pracować tak, jakby te przestrzenie topologiczne były po prostu zbiorami lub, jeśli ponadto mają dodatkową strukturę algebraiczną, jakby były obiektami czysto algebraicznymi (bez topologii).

Rysunek 1. Zbieżny ciąg punktów wraz z granicą - podstawowy przykład zbioru proskończonego.

Nasze cele w tym projekcie mogą być zwięźle podsumowane jako:

- **Wykorzystanie matematyki skondensowanej do zdefiniowania i badania dokładniejszych niezmienników:** na przykład, do zdefiniowania wyższych grup homotopii (tak jak to zrobili Artin i Mazur), ale w *pro-étalnym* kontekście. Porównanie ich z lepiej znanymi niezmiennikami. Policzenie w niektórych przypadkach.
- **Wykorzystanie matematyki skondensowanej do łączenia pojęć z różnych dziedzin matematyki**: szukanie szerokiego wspólnego formalizmu dla niektórych niezmienników w geometrii algebraicznej / sztywnej i topologii.
- **Badanie *jak duże* są te niezmienniki i ile informacji niosą:** wydaje się, że skondensowane π_1, bez przejścia do odpowiedniego ilorazu, bywa zaskakująco duże. Na przekór temu, planujemy pokazać, że pewne „ujarzmione" wersje π_1 są rozsądniejszych rozmiarów niż wcześniej przewidywano.