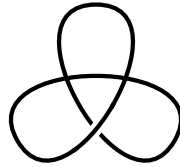


ISTNIENIE I REGULARNOSC UKŁADÓW RÓWNAN ELIPTYCZNYCH O POCHODZENIU GEOMETRYCZNYM

KATARZYNA EWA MAZOWIECKA

Według legendy, w roku 333 przed naszą erą Aleksander Wielki dotarł do Gordion, gdzie znajdował się słynny węzeł. Zgodnie z przepowiednią osoba, która rozplącze węzeł miała zostać królem całej Azji. Aleksander, będąc w trakcie podboju Azji i dążąc do umocnienia swojej pozycji, postanowił rozwiązać problem. Przekonał się, że węzła nie da się rozplątać w sposób konwencjonalny, więc zdecydował się go przeciąć.

Nad problemem rozwiązania tego węzła warto się pochylić od strony matematycznej. Okazuje się bowiem, że matematycznie Aleksander mógł mieć rację — istnieją węzły, których nie da się rozwiązać. Dla przykładu takim węzłem jest węzeł trójlistny,



który nie może być w sposób ciągły przekształcony w okrąg. To oznacza, że węzeł trójlistny oraz okrąg nie są homotopijne. W tym projekcie będziemy się zajmowali między innymi ułamkowymi przekształceniami harmonicznymi, które są powiązane z Energią Möbiusa (Energia Möbiusa jest funkcjonalem zdefiniowanym na przestrzeni węzłów), używanej między innymi w matematycznych modelach DNA. Będziemy rozważać problem minimalizacji wśród przekształceń, które są homotopijne z ustalonym z góry przekształceniem.

Ułamkowe przekształcenia harmoniczne można wyobrazić sobie w następujący sposób. Wyobraźmy sobie, że mamy drut, którego oba końce przymocujemy do jakiejś powierzchni (na przykład do sfery), następnie tę konstrukcję zanurzamy w wodzie z mydłem. Jak powstała bańka mydlana dotyka powierzchni? Okazuje się, że matematyczne równanie opisujące to zjawisko jest równaniem przekształceń pół-harmonicznych (czyli punktem krytycznym pół-harmonicznej energii).

W tym projekcie będziemy zainteresowani przekształceniami pomiędzy rozmaitościami riemannowskimi Σ i $\mathcal{N}$. Rozmaitości są obiektami geometrycznymi, na przykład może być to gładka powierzchnia bez samoprzecięć, jak powierzchnia kuli, lub elipsoidy, lub dętka rowerowej. Mając dane przekształcenie gładkie $v: \Sigma \rightarrow \mathcal{N}$ zastanawiamy się czy istnieje inne przekształcenie, które minimalizuje zadaną energię wśród przekształceń, które są homotopijne z v . A jeśli istnieje to jakie ma własności? Tutaj należy też odpowiednio rozumieć pojęcie homotopijności. Przekształcenia, które rozważamy niekoniecznie są ciągłe, są jedynie w przestrzeni Sobolewa, okazuje się, że teorię homotopii można rozszerzyć do odpowiedniej klasy takich przekształceń — przekształceń należących do krytycznej przestrzeni Sobolewa.

Będziemy badać kilka energii, które matematycznie są ze sobą powiązane: energię harmoniczną, czyli całkę Dirichleta, jej uogólnienie energię p -harmoniczną

$$E_p(u) := \int_{\Sigma} |\nabla u|^p dV$$

oraz energię ułamkowo-harmoniczną (gdzie rozpatrywana energia jest pół-normą Gagliardo). Są to podstawowe funkcjonały rozważane w rachunku wariacyjnym, zasadniczą trudność w badaniu tych obiektów stanowi nieliniowy więz — przekształcenie u ma wartości w rozmaitości $\mathcal{N}$, co sprawia, że problem jest nieliniowy, a co za tym idzie klasyczna teoria regularności nie przekłada się na te problemy. W szczególności przekształcenia, które rozważamy mogą być osobliwe (czyli mogą być nieciągłe).

Jednym z celów projektu jest stworzenie narzędzi, które będą stosowane także w teorii węzłów czy energii powierzchniowych.