Efektywne algorytmy dla NP-trudnych problemów w grafach planarnych

Jedną z głównych motywacji do rozwijania teorii algorytmów jest zapotrzebowanie na efektywne sposoby rozwiązywania rozmaitych problemów optymalizacyjnych. W idealnym scenariuszu chcielibyśmy wprowadzić do komputera dane, jak np. opis sieci drogowej, i po chwili odczytać rozwiązanie, jakim może być np. nakrótsza ścieżka odwiedzająca wszystkie miasta. Oczywiście moglibyśmy po prostu wygenerować wszystkie potencjalne rozwiązania i wybrać najlepsze z nich, ale zazwyczaj liczba takich rozwiązań rośnie strasznie szybko wraz ze wzrostem rozmiaru danych. Dlatego potrzebujemy nie tylko szybkich komputerów, ale też sprytnych algorytmów. Zanim przejdę do szczegółów technicznych, przedstawiam przykłady dwóch zagadnień optymalizacyjnych związanych z tym projektem.

Przykład: alokacja z ograniczeniami. Rozważmy projekt budowy nowego miasta (jak w grze Cities: Skylines). Wśród wielu wyzwań pojawia się bardzo prozaiczne pytanie: gdzie powinniśmy umieścić stacje wodociągowe? Przypuśćmy że szacujemy zapotrzebowanie na 10 takich stacji i w celu optymalizacji kosztów chcielibyśmy zminimalizować średnią odległość pomiędzy punktem odbioru wody a przypisaną mu stacją. Co więcej, pojedyncza stacja ma ograniczoną przepustowość, np. może obsłużyć maksymalnie 100.000 mieszkań. Jak znaleźć optymalny (bądź bliski optymalnemu) plan budowy stacji szybciej niż przeglądając wszystkie możliwe kombinacje (których liczba jest ogromna)?

Przykład: rozmieszczenie obwodów elektronicznych. Wyobraźmy sobie teraz dla odmiany, że chcielibyśmy zaprojektować płytę główną dla nowego modelu komputera. Powinna ona zawierać szereg obwodów elektronicznych łączących pewne obiekty, np. procesor ze slotem pamięci RAM. Takie obwody nie mogą się ze sobą dotykać ani krzyżować. Jak sprawdzić czy rozmieszczenie takich obwodów jest możliwe dla danego rozkładu obiektów na płycie głównej?

Wspólny mianownik: planarność. Choć na pozór te dwa problemy wydają się ze sobą niepowiązane, jest pewna własność, która je łączy. W obu przypadkach musimy przeanalizować graf (czyli model sieci połączeń), który można narysować na płaszczyźnie. Taki graf nazywamy *planarnym.* Klasa grafów planarnych posiada bardzo bogatą matematyczną strukturę, która często przychodzi z pomocą podczas projektowania algorytmów. Dawno już zauważono, że wiele problemów obliczeniowych, będących bardzo trudnymi do rozwiązania w ogólnym przypadku, okazuje się zdecydowanie prostsze w grafach planarnych. Poza powyższymi przykładami, takie zjawisko dotyczy szerokiej gamy problemów pojawiających się w transporcie, chemii, przetwarzaniu obrazów czy wizualizacji danych.

Zakres projektu. Teoria grafów planarnych jest intensywnie rozwijania od prawie stu lat. Przez ten czas okryto liczne jej powiązania z kombinatoryką, topologią, logiką, algebrą, dekompozycjami grafów, a także takimi dziedzinami informatyki jak preprocessing czy algorytmy na dynamicznych danych. W szczególności, dwa obszary algorytmiki, w których planarność okazała się wyjątkowo przydatna, to algorytmy aproksymacyjne i złożoność parametryzowana, które pozwalają na alternatywną analizę złożoności trudnych obliczeniowo problemów.

Pomimo tego, istnieją problemy związane z planarnością, których wciąż nie potrafimy do końca zrozumieć. Są to fundamentalne zagadnienia związanie z modyfikacjami grafów, szukaniem ścieżek, czy klasteryzacją, które uogólniają wspomniane przykłady. Co więcej, znajdują się wśród nich problemy „awangardowe" czyli takie, których zrozumienie stanowi barierę przed dalszym rozwojem algorytmiki. Celem tego projektu jest pogłębienie naszego zrozumienia kombinatorycznej i topologicznej struktury grafów planarnych i przekucie tego w wymierny postęp w postaci efektywniejszych algorytmów.