

Logiczne i filozoficzne aspekty pluralizmu i potencjalizmu w teorii mnogości i arytmetyce – streszczenie popularno-naukowe

Potencjalizm w filozofii matematyki jest ideą, wedle której uniwersum matematycznego dyskursu nigdy nie jest dane w całości, lecz stanowi spektrum klas obiektów, które mogą być odkrywane jedynie stopniowo. Idea ta siega starożytnych sporów dotyczących potencjalnej i aktualnej nieskończoności - mianem potencjalizmu można określić arystotelesowski pogląd, głoszący, że właściwym sensem pojęcia nieskończoności jest jedynie nieskończoność potencjalna, co oznacza, że nie istnieją tak naprawdę właściwe zbiory nieskończone, lecz że konstrukcje obiektów skończonych mogą być prowadzone nieograniczenie (lecz zawsze skończenie) długo.

Idea potencjalizmu została niedawno zastosowana do teorii bogatszych niż arytmetyka, w tym do teorii obiektów nieskończonych, tj. teorii mnogości. Potencjalizm teoriomnogościowy głosi, że całe uniwersum matematyki (formalizowanej w teoriomnogościowych terminach) nigdy nie jest dane w pełni, lecz że zawsze można je rozszerzyć lub zmodyfikować. Ten sposób myślenia o uniwersum teorii zbiorów jest ściśle związany z tzw. koncepcją multiwersyzmu, zgodnie z którą nie istnieje absolutne, ostateczne i jedynie prawdziwe pojęcie zbioru - a co za tym idzie - nie ma filozoficznego uzasadnienia mowa o jednym i właściwym uniwersum zbiorów, lecz że istnieje wielość akceptowalnych modeli teorii mnogości, każdy realizujący szczególne, właściwe sobie pojęcie zbioru. Konsekwencją tego poglądu musi być odrzucenie jako nieuzasadnionych prób poszukiwania *ostatecznych* aksjomatów opisujących teoriomnogościowe uniwersum. Multiwersyzm postuluje w to miejsce badanie jak najszerszych niesprzecznie opisywalnych klas modeli teorii mnogości i traktowanie ich jak równoprawnych struktur stanowiących podstawę matematyki.

Głównym celem niniejszego projektu jest zbadanie własności różnych koncepcji teoriomnogościowego multiwersum z punktu widzenia potencjalizmu i dokładna analiza wzajemnego stosunku tych stanowisk. W tym celu planujemy poddać ideę potencjalizmu szczegółowemu filozoficznemu badaniu i przyglądać się różnym postaciom potencjalizmu w obrębie różnych koncepcji teoriomnogościowego multiwersum oraz w obrębie klas niestandardowych i skończonych modeli arytmetyki, jako że to dla tego języka formułuje się głównie potencjalistyczne formalizacje.

Za pomocą badań z zakresu logiki matematycznej - głównie teorii modeli dla teorii mnogości, logiki modalnej, i logicznych podstaw arytmetyki - zbadamy logiczne aspekty różnych postaci takich pluralistycznych koncepcji w podstawach i filozofii matematyki. Mamy nadzieję dzięki temu rzucić więcej światła na problem tego, czy ontologiczny pluralizm jako stanowisko w filozofii teorii mnogości i arytmetyki jest do utrzymania, i jeśli tak, to dzięki czemu, a jeśli nie, to dlaczego. Spodziewamy się w toku prac nad realizacją projektu znaleźć globalne własności teoriomnogościowych uniwersów mogące być dodatkowo przedmiotem czysto matematycznych badań.

Dodatkowym narzędziem, stosowanym z sukcesami we współczesnej logice do badania podstaw matematyki, będą dla nas logiki modalne. Za pomocą tego narzędzia będziemy mogli ściśle porównywać ze sobą istotne dla potencjalizmu własności modalne systemów modeli dla teorii formułowanych nawet w różnych, z pozoru nieprzystających do siebie językach formalnych.