Geometria algebraiczna zajmuje się badaniem własności równań poprzez analizę geometrii ich rozwiązań. Obiekty geometryczne powiązane z konkretnym równaniem nazywamy *rozmaitościami algebraicznymi*; najprostsze przykłady takich rozmaitości to prosta czy stożkowa, ale w ogólności są to obiekty bardzo skomplikowane.

Podstawowym celem mojego projektu jest analiza *rodzin jednoparametrowych* rozmaitości algebraicznych. Można o nich myśleć jako o kolekcji równań z występującym parametrem t. Na przykład dla dodatnich liczb rzeczywistych $t \in \mathbb{R}_{>0}$ równania

$$x^2 + y^2 = t$$

opisują rodzinę okręgów o zmiennym promieniu.

W szczególności przedmiotem moich badań będą rodziny trójwymiarowych rozmaitości *Calabiego-Yau*. Jest to specjalna klasa rozmaitości algebraicznych, które posiadają zespolony element objętości ω. Motywacją do ich badania są zarówno dociekania fizyczne (związane z teorią strun), jak i ważne pytania natury arytmetycznej (jednowymiarowe rozmaitości Calabiego-Yau stanowiły istotne narzędzie w dowodzie Wielkiego Twierdzenia Fermata).

Dla danej rodziny rozmaitości Calabiego-Yau X_t (indeksowanej parametrem t) każdy element posiada zespolony element objętości ω_t. Okazuje się, że całki $\displaystyle\int_{\gamma_t} \omega_t$ spełniają równanie różniczkowe czwartego rzędu, nazywane *równaniem Picarda-Fuchsa* rodziny X_t. Głównym przedmiotem mojego projektu badawczego jest uzyskiwanie informacji na temat wyjściowej rodziny na podstawie znajomości własności równania.

Podstawowym narzędziem służącym badaniu równań różniczkowych jest *grupa monodromii*. Opisuje ona w jaki sposób rozwiązanie równania zmienia się, gdy przesuwamy je wzdłuż krzywej omijającej punkty osobliwe. W przypadku rodzin rozmaitości Calabiego-Yau grupa ta jest pogrupą grupy symplektycznej $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{Z})$, co pozwala na badanie jej własności arytmetycznych. Jest to jeden z celi mojego projektu. Kolejnym jest analiza macierzy monodromii w wyróżnionych lokalnych bazach, tak zwanych *bazach Frobeniusa*.

Ten problem sposób prowadzi do zagadnienia specjalnych wartości L-funkcji. L-funkcja jest funkcją zespoloną powiązaną z pewną formą modularną f i specjalne wartości $L(f, 1)$, $L(f, 2)$ pojawiają się w naturalny sposób jako wartości rozwiązań równania Picarda-Fuchsa w pewnych punktach osobliwych. (*Punkt osobliwy* rodziny to taka wartość parametru t, dla której element rodziny X_t ulega degenracji; na przykład we wspomnianej wyżej rodzinie okręgów punktem osobliwym byłoby $t = 0$, gdzie okrąg redukuje się punktu). Analiza związku równań Picarda-Fuchsa i form modularnych jest drugim z celów mojego projektu.

Związek między formami modularnymi a rozmaitościami Calabiego-Yau jest głęboki i wciąż niezupełnie zrozumiany. Może on być opisany jako fakt, że ilość rozwiązań równania opisującego rozmaitość Calabiego-Yau jako kongruencji modulo liczba pierwsza p jest zakodowany w L-funkcji pewnej formy modularnej f. Ostatnim celem mojego projektu jest próba wyznaczenia dobrej postaci rozmaitości dla liczb pierwszych p, dla których równanie opisujące rozmaitość jest osobliwe. Powinno to doprowadzić do lepszego zrozumienia czynników Eulera L-funkcji odpowiadających tym liczbom pierwszym.