

ROZSZERZONE ORIENTACJE I EFEKTYWNE KONSTRUKCJE DLA METODY ALON-TARSI

Tertium non datur – prawo wyłączonego środka¹, używane w dowodach matematycznych przynajmniej od czasów Arystotelesa, było kwestionowane przez niektórych logików na początku XX wieku jako główne źródło *niekonstruktywności* w matematyce. Dowód jest konstruktywny, gdy oprócz udowodnienia, że jakiś obiekt istnieje, dostarcza wskazówek do skonstruowania takiej instancji. Pierwotna motywacja kwestionowania niekonstruktywnych argumentów miała proveniencję filozoficzną. Idea matematyki konstruktywnej początkowo nie spotkała się z uznaniem w środowisku naukowym. Jeden z najwybitniejszych matematyków tamtych czasów, David Hilbert wyraził swój zdecydowany sprzeciw słowami:

Przyjęcie zasady wyłączonego środka od matematyka byłoby tym samym, co zakazaniem teleskopu astronomowi lub bokserowi używania pięści. (Hilberta [1928])²

Prawie sto lat później perspektywa jest zupełnie inna. Jednym ze źródeł tej zmiany jest zastosowanie narzędzi matematycznych w informatyce. Kiedy inżynier musi opracować architekturę układu scalonego spełniającego pewne ograniczenia, formalny dowód na to, że taki projekt jest możliwy, jest dla niego mało przydatny. Dużo bardziej pomocny byłby szkic projektu lub wskazówka dotycząca rozmieszczenia elementów składowych. Można wprawdzie powiedzieć, że znalezienie obiektu, o którym wiadomo, że istnieje, jest łatwym zadaniem - w praktyce liczba możliwości jest zwykle ograniczona można więc użyć komputera, aby przejrzeć je wszystkie. Jednak w przypadku większości praktycznych problemów nowoczesne komputery potrzebowałyby wieków na przeprowadzenie takiej operacji. Nie wystarczy więc że istnieją procedury, które są w stanie znaleźć rozwiązanie interesujących nas problemów, potrzebujemy jeszcze żeby te procedury były *wydatne*. Najbardziej rozpowszechnionym we współczesnej algorytmice kryterium wydajności jest czas działania – często przyjmuje się że algorytmy wydajne to te które kończą się po liczbie kroków która jest ograniczona pewną wielomianową funkcją rozmiaru wejścia lub wyjścia.

W 2002 roku na Międzynarodowym Kongresie Matematyków Noga Alon określił metody algebraiczne i probabilistyczne jako dwie główne techniki, które „odegrały kluczową rolę w rozwoju współczesnej kombinatoryki” (tj. dziedziny matematyki badającej struktury skończone). Co ciekawe, oba te narzędzia są z natury niekonstruktywne. Wiele pracy włożono w poszukiwanie efektywnych algorytmów konstruujących obiekty których istnienie można dowieść z pomocą argumentów probabilistycznych. Ostatnie lata przyniosły znaczące sukcesy w tej dziedzinie i znacznie poszerzyły nasze rozumienie roli losowości w obliczeniach. Budowanie algorytmów opartych o dowody wykorzystujące techniki algebraiczne często okazuje się być niemałym wyzwaniem.

Nasz projekt ma na celu badanie zastosowanie metody algebraicznej do problemów kolorowania grafów znanej jako metoda Alona-Tarsiego (kolorowanie grafów jest uniwersalnym językiem w którym można precyzyjnie wyrazić wiele problemów natury algorytmicznej). Będziemy analizować znane niekonstruktywne dowody, opracowywać algorytmy oraz badać przeszkody i ograniczenia dla efektywnej algorytmizacji. Najbardziej interesującą nas aplikację dla dwóch dobrze ugruntowanych i szeroko badanych zagadnień. Pierwsze z nich dotyczy kolorowania grafów planarnych, ich wariantów oraz uogólnień na inne grafy o stosunkowo małej liczbie krawędzi. Drugie to zagadnienia listowego kolorowania krawędzi grafów. Jednym z wielkich sukcesów teorii złożoności obliczeniowej jest opracowanie narzędzi które pozwalają na dowodzenie, że niektórych problemów nie da się skutecznie rozwiązać za pomocą komputera. W naszych badaniach spodziewamy się napotkać tego typu bariery. Jest więc prawdopodobne, że wynik projektu będzie zawierał również wyniki mówiące że dla niektórych badanych przez nas problemów efektywne konstrukcje nie istnieją.

¹Dla każdego zdania prawdziwe jest albo to zdanie, albo jego zaprzeczenie.

²cytowanie pochodzi z *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, <https://plato.stanford.edu/>