Ścisłe metody numeryczne dla równań różniczkowych funkcyjnych

Równania Różniczkowe Zwyczajne (RRZ) są jednym z podstawowych modeli, dzięki którym możemy w ścisły i usystematyzowany sposób badać otaczającą nas rzeczywistość. Model taki najłatwiej wyobrazić sobie na przykładzie samochodu poruszającego się po drodze. Za pomocą kierownicy, hamulca i gazu zmieniamy prędkość i kierunek jazdy - definiując wektor prędkości (v). Oczywiście wybierając kierunek, bierzemy pod uwagę nasze obecne położenie (x), zatem v jest funkcją x, $v = v(x)$. Gdyby samochód zostawiał za sobą ślad w punkcie x wtedy nakreślona linia (*trajektoria*) byłaby zależna od czasu $x = x(t)$ i w każdym punkcie byłaby styczna do wektora prędkości - inaczej mówiąc, prędkość jest pochodną drogi po czasie: $x'(t) = v(x(t))$. Zależność drogi od prędkości definiuje zatem równanie zawierające pochodną - równanie różniczkowe.

Prowadząc samochód, staramy się na podstawie aktualnej sytuacji wybrać najlepszy wektor prędkości, tak aby rozwiązanie zaprowadziło nas do wyznaczonego celu. Tu pojawia sie pytanie: czy jesteśmy w stanie podejmować decyzje natychmiast? Oczywiście odpowiedź brzmi: „nie", m.in ze względu na to jak pracuje nasz układ nerwowy zawsze reagujemy *z opóźnieniem*. Łatwo można zauważyć, że opóźnienie jest obecne w bardzo wielu dziedzinach życia: namnażanie się nowych organizmów nie zależy od ilości organizmów w danej chwili, ale od liczby dorosłych osobników - tych które narodziły się wcześniej i dopiero osiągnęły dojrzałość. Mechanizmy regulacji genowej działają z opóźnieniem, gdyż sygnały rozsyłane w organizmie muszą dostać się do odpowiednich komórek. Prędkość rozchodzenia się fal magnetycznych jest ograniczona, w związku z tym sterując z ziemi robotem na marsie należy uwzględnić co najmniej 3 minutowe opóźnienie. Stąd, chcąc stworzyć realistyczny model zjawiska w przyrodzie, musimy uwzględniać opóźnienie.

Istnieje wiele form opóźnienia, które mogą wpłynąć na układ: mogą to być opóźnienia stałe, opóźnienia zależne od położenia układu (np. sygnał potrzebuje więcej czasu na pokonanie większej odległości) czy opóźnienia rozproszone (osobniki w populacji mogą dojrzewać wcześniej lub później). Wspólnym terminem obejmującym równania różniczkowe zależne od stanu w przeszłości jest termin Równań Różniczkowych Funkcyjnych (RRF). Tego typu modelami chcemy zająć się w niniejszym projekcie.

Istnieje szereg pytań, które są ważne w modelach z opóźnieniem. Jak opóźnienie wpływa na dany model? Czy da się przewidzieć, jak będą wyglądały trajektorie w układzie? Czy układ jest stabilny, czy może rozwiązania zachowują się chaotycznie? Czy mała zmiana parametru może doprowadzić do katastrofy? Jak duże może być opóźnienie w oddziaływaniu, zanim system stanie się nieprzewidywalny (np. jeśli dany lek opóźnia nasze reakcje, to czy możemy po jego zażyciu bezpiecznie prowadzić samochód)? Odpowiedź na te i inne pytania jest kluczowa dla zbadania zachowania modelu (jego dynamiki). Zrozumienie dynamiki modelu często pozwala wyjaśnić przyczyny i przewidzieć zachowanie rzeczywistego układu.

Niestety, większość RRF modelujących wiele ze znanych fenomenów fizycznych wymyka się obecnie dostępnym metodom czysto matematycznego rozumowania. Z pomocą przychodzą nam komputery, dzięki którym możemy badać takie układy numerycznie z pomocą specjalnych programów do symulacji. Numeryczne rozwiązania są jednak zawsze tylko przybliżeniem rzeczywistego obrazu dynamiki. Stąd pojawia się pytanie: czy jesteśmy w stanie w jakiś sposób zweryfikować prawdziwość obserwacji dokonanych za pomocą komputera? Odpowiedź w wielu przypadkach jest twierdząca i jedną z możliwych odpowiedzi jest użycie ścisłych metod numerycznych, które oprócz znajdowania przybliżonych rozwiązań udowadniają, że wystarczająco blisko znaleźć można prawdziwe rozwiązanie, w zasadzie identyczne z przybliżonym. Tego typu metody były stosowane już dla równań różniczkowych zwyczajnych, a obecnie trwają pracę nad wdrożeniem ich w innych, trudniejszych klasach problemów.

Celem niniejszego projektu jest stworzenie i zaimplementowanie takich metod w przypadku RRF poprzez dostarczenie matematycznych narzędzi oraz oprogramowania komputerowego, które pozwoli w sposób ścisły weryfikować obserwacje poczynione w numerycznych symulacjach. Do tej pory autorzy projektu z powodzeniem stworzyli pierwsze wersje tego typu metod dla najprostszych równań ze stałym opóźnieniem i te badania dają nadzieję na rozszerzenie spektrum rozwiązywanych przykładów na cała klasę RRF. Mamy nadzieję, że opracowane rozwiązania posłużą nie tylko do dowodzenia ważnych matematycznych twierdzeń, ale w przyszłości staną się przydatnym narzędziem w pracy badaczy z innych dziedzin nauki.