

Zupełność w sensie Posta a zupełność względem semantyki sąsiedztwa w klasycznych logikach modalnych

W potocznym sensie, logika to nauka o rozumowaniu, w szczególności o rozumowaniach niezawodnych, czyli przede wszystkim o dedukcji. W ściślejszym ujęciu, logika to zbiór zdań spełniających określone zasady. To bardziej techniczne ujęcie terminu “logika” pozostaje w pewnym związku z pierwotną intuicją: logika to system, który ma w jakiś sposób oddawać prawidłowe rozumowania przeprowadzane w życiu codziennym. Logika klasyczna, mimo swoich licznych zalet, okazuje się nie obejmować wszystkich tego typu rozumowań. Stąd biorą się logiki nieklasyczne. Jedną z takich logik jest logika modalna, która wzbogaca wyjściowy język logiki klasycznej o tak zwane funktory modalne, które nawiązują do zwrotów języka naturalnego wyrażanych za pomocą słów “konieczne, że ...” oraz “możliwe, że...”.

Sama logika modalna to tak naprawdę ogromna rodzina nieskończenie wielu logik. Wśród nich wyróżniamy normalne logiki modalne, które przez ostatnie dziesięciolecia intensywnych badań doczekały się zaawansowanej metateorii i, co za tym idzie, statusu odrębnej gałęzi nauki w ramach ogólnie rozumianej logiki. Okazuje się jednak, że normalne logiki modalne to jedynie niewielki fragment o wiele większej rodziny tzw. klasycznych logik modalnych. Klasyczne logiki modalne to najszersza znana rodzina logik modalnych i w tym sensie badania nad nimi prowadzą do najogólniejszej teorii logiki modalnej jako takiej. Mimo to w literaturze przedmiotu nie znajdziemy wielu publikacji poświęconych klasycznej logice modalnej. Wiele zagadnień pozostaje nieprzebadanych a pytania dotyczące jej metateorii wciąż pozostają bez odpowiedzi.

Celem projektu jest odpowiedź na dwa ściśle związane ze sobą pytania postawione w 2016 roku przez Petera Fritza. Chodzi o podanie liczby klasycznych logik modalnych, które są zupełne w sensie Posta i posiadają adekwatną interpretację w strukturach sąsiedztwa oraz o podanie liczby takich klasycznych logik modalnych, które są zupełne w sensie Posta, ale nie posiadają odpowiadających im struktur sąsiedztwa. W celu przybliżenia znaczenia wymienionych problemów spróbuję wyjaśnić dwa pojęcia.

Po pierwsze, zupełność w sensie Posta to pewnego rodzaju maksymalność. Mianowicie, logika jest zupełna w sensie Posta, gdy nie da się jej właściwie rozszerzyć nie popadając przy tym w sprzeczność. Innymi słowy, logika, która jest zupełna w sensie Posta ma tylko jedno właściwe rozszerzenie: logikę sprzeczną. Logiki zupełne w sensie Posta pełnią istotną rolę, gdyż mając najwięcej praw oferują treściowo najbogatsze narzędzie rozumowania.

Po drugie, struktury sąsiedztwa to obiekty matematyczne, które służą do formalnego określenia warunków prawdziwości formuł logiki modalnej. Niewykluczone, że istnieją logiki modalne, które nie posiadają adekwatnej klasy struktur sąsiedztwa, czyli nie da się wskazać klasy wspomnianych struktur, które będą uprawdziwiać wszystkie i dokładnie te zdania, które są prawami danej logiki.

Postawione przez Fritza problemy i ich ewentualne rozwiązanie rzucą światło na możliwości i ograniczenia struktur sąsiedztwa w odniesieniu do niesprzecznych klasycznych logik modalnych posiadających maksymalną ilość praw.