Tytuł projektu: **Obliczalna teoria modeli i filozofia strukturalizmu matematycznego**

O czym jest matematyka? Nasuwa się odpowiedź, że matematyka jest nauką o liczbach. Jednak przestajemy być tego tacy pewni, gdy pomyślimy o teorii grafów lub teorii grup. W filozofii matematyki wyodrębnił się pogląd, sięgający lat 60. XX wieku, że matematyka bada struktury (innymi słowy - modele), takie jak liczby naturalne, grafy, grupy itp. U podstaw strukturalizmu leży przekonanie, że matematycy nie rozróżniają systemów, które mają tę samą strukturę (lub, w żargonie matematycznym - które są izomorficzne). To, co ma znaczenie dla matematyków, to nie wewnętrzna natura lub reprezentacja obiektów, które badają (pytanie takie jak "Co to jest liczba 5?" nie jest naukowo istotne), a jedynie relacje, które zachodzą między nimi. Ten pogląd filozoficzny nazywany jest strukturalizmem matematycznym.

Niniejszy projekt naukowy zajmuje się czterema wyzwaniami, które stoją przed strukturalizmem matematycznym, i proponuje znalezienie rozwiązań przy użyciu narzędzi teorii matematycznej znanej jako obliczalna teoria modeli.

Jednym z popularnych poglądów w strukturalizmie matematycznym jest tzw. strukturalizm obliczeniowy. Stwierdza on, że zamierzone modele teorii znanej jako PA (arytmetyka Peano, wprowadzonej w celu sformalizowania kluczowych własności liczba naturalnych) są rekurencyjnymi (tj. realizowalnymi przez program komputerowy) notacjami spełniającymi PA ("zamierzony model" oznacza konkretny model, o którym myślą matematycy uprawiający daną teorię, nawet jeśli teoria ta ma inne modele, zupełnie innego od zamierzonego). Aby nadać strukturalizmowi obliczeniowemu nieco więcej praktycznego sensu (w szczególności, w kontekście sytuacji, w których decyzje obliczeniowe nie mogą być odkładane w nieskończoność), argumentujemy, że funkcje, które są pierwotnie rekurencyjne w zamierzonej notacji, muszą być identyczne ze standardowymi funkcjami pierwotnie rekurencyjnymi (funkcja pierwotnie rekurencyjna jest realizowalna przez program komputerowy, który nie może używać nieograniczonych pętli). Strukturalizm obliczeniowy nie spełnia tego wymogu. Aby rozwinąć nasze stanowisko, sięgamy to tak zwanej punktualnej teorii modeli (poddziedziny obliczalnej teorii modeli).

Strukturaliści rozróżniają dwa kryteria strukturalności: niezmienniczość (z grubsza rzecz biorąc, właściwość jest strukturalna, jeśli zawsze, gdy dotyczy danej struktury, dotyczy wszystkiego, co jest z nią izomorficzne) oraz definiowalność (właściwość jest strukturalna, jeśli można ją zdefiniować w języku struktury). Kryteria te napotykają kilka trudności w wyjaśnianiu pojęcia strukturalności, w szczególności właściwości obliczeniowych. Aby temu zaradzić, w projekcie proponujemy ujęcie hybrydowe, które dopuszcza relacje podobieństwa strukturalnego inne niż izomorfizm. Ponadto w projekcie zbadamy, w jaki sposób obliczalna teoria modeli może pomóc w znalezieniu strukturalnych charakteryzacji ważnych właściwości obliczeniowych i przedyskutujemy, czy i jak można je pogodzić z kryterium definiowalności.

Trzeci obszar koncentruje się na pytaniu, jak określić zamierzony model teorii. Wysuwamy naturalną hipotezę: jeśli teoria ma zamierzony model, to jest on najprostszy, przy czym pojęcie prostoty wyjaśniamy przy użyciu naturalnych hierarchii złożoności mających zastosowanie do struktur. Niedawne wyniki innych badaczy potwierdzają tę hipotezę dla PA, ale będziemy ją dalej analizować, aby ocenić jej szerszą użyteczność.

Czwarty obszar dotyczy wyzwania postawionego przez znanego filozofa, Benacerrafa: w jaki sposób zdobywamy wiedzę o abstrakcyjnych strukturach matematycznych? Projekt sugeruje rozważenie znacznie węższego problemu rozróżnialności, który można sformułować jako grę pomiędzy uczniem a nauczycielem. Uczeń ma dostęp do modelu M, a nauczyciel, chcąc dowiedzieć się, czy model ucznia jest tym właściwym, pyta go o relacje zachodzące w M. Odpowiednia strategia zgadywania może doprowadzić nauczyciela do nauczenia się odpowiedzi na interesujące go pytanie. W projekcie zbadamy ten problem sięgając do niedawno wymyślonej teorii uczenia się struktur.

Badając te cztery obszary, projekt ma na celu przyczynienie się do zrozumienia i rozwoju filozofii strukturalizmu w matematycznego, dostarczając rozwiązań dla wyzwań i pytań stawianych w tej dziedzinie.