O PARACH ZARISKIEGO OSOBLIWOŚCI POWIERZCHNI

Projekt dotyczy topologii osobliwości powierzchni zespolonych.

Niech g_0 i g_1 będą dwoma wielomianami trzech zmiennych zespolonych z_1, z_2, z_3. Zakładamy, że g_0 i g_1 zerują się w początku układu współrzędnych $\mathbf{0} \in \mathbb{C}^3$ i że odpowiadające im kiełki powierzchni, $V(g_0)$ i $V(g_1)$, mają izolowane osobliwości w $\mathbf{0}$. Ogólnie wiadomo, że jeśli $V(g_0)$ i $V(g_1)$ mają taką samą topologię zanurzoną, to mają tę samą liczbę Milnora, μ. Z drugiej strony jest całkiem możliwe, że dwie izolowane osobliwości powierzchni mają tę samą liczbę Milnora (lub nawet tę samą trójkę μ^* Teissiera) i różne topologie zanurzone. Obalając przypuszczenie Yau, Artal Bartolo wykazał ponadto, że topologia „linku” powierzchni i wielomian charakterystyczny jej monodromii nie wyznaczają jednoznacznie topologii pary $(\mathbb{C}^3, V(g_j))$, $j \in \{0, 1\}$. Jednak w praktyce, mając g_0 i g_1 z tym samym wielomianem charakterystycznym (lub tą samą monodromią funkcji zeta), z tą samą trójką μ^* Teissiera i homeomorficznymi „linkami” abstrakcyjnymi, bardzo trudno jest sprawdzić, czy istnieje homeomorfizm par $(\mathbb{C}^3, V(g_0))$ i $(\mathbb{C}^3, V(g_1))$. W tym projekcie jesteśmy zainteresowani pewnymi typami osobliwości powierzchni, które „przypuszczalnie określają” pary kiełków $V(g_0)$ i $V(g_1)$ mających te same powyższe niezmienniki, ale topologie par $(\mathbb{C}^3, V(g_0))$ i $(\mathbb{C}^3, V(g_1))$ są różne.

Dokładniej, załóżmy teraz, że dla $j \in \{0, 1\}$ wielomian g_j ma postać $g_j = f_j + z_i^{d+m}$ $(i \in \{1, 2, 3\})$, gdzie m jest liczbą całkowitą ≥ 1, a f_j jest niestałym, zredukowanym, wielomianem jednorodnym stopnia d spełniającym następujące warunki (które są spełmione po stosownej zamianie układu współrzędnych):

- (i) zbiory punktów krytycznych krzywych rzutowych $C_j = \{f_j = 0\} \subseteq \mathbb{P}^2$ nie przecinają żadnej osi współrzędnych $z_i = 0$ w $\mathbb{P}^2$ $(1 \leq i \leq 3)$;
- (ii) f_j jest „convenient” (tzn. diagram Newtona f_j przecina każdą oś współrzędnych) i niezdegenerowany w sensie Newtona na dowolnej ścianie Δ diagramu Newtona, która nie jest maksymalnego wymiaru.

Wtedy g_j określa izolowaną osobliwość powierzchni w $\mathbb{C}^3$ zwaną *osobliwością Lê–Yomdina.* Załóżmy też, że rzutowe styczne stożki $V(g_0)$ i $V(g_1)$ (czyli krzywe rzutowe C_0 i C_1) tworzą *parę Zariskiego krzywych rzutowych* w $\mathbb{P}^2$ (tj. C_0 i C_1 mają takie same „combinatorics”, a pary $(\mathbb{P}^2, C_0)$ i $(\mathbb{P}^2, C_1)$ nie są homeomorficzne). Mówimy, że $(V(g_0), V(g_1))$ jest *ζ-parą Zariskiego osobliwości powierzchni*, jeśli kiełki g_0 i g_1 w $\mathbf{0}$ mają tę samą funkcję zeta monodromii i jeśli odpowiednie linki, K_{g_0} i K_{g_1}, mają tę samą topologię. Ostatnio Oka i autor pokazali, że jeśli osobliwości krzywych C_0 i C_1 są niezdegenerowane w sensie Newtona w stosownych lokalnych współrzędnych, to $(V(g_0), V(g_1))$ jest ζ-parą Zariskiego osobliwości powierzchni, g_0 i g_1 mają tę samą trójkę μ^* Teissiera, ale wielomiany te leżą w różnych łukowo spójnych składowych stratu $\mu^* = \text{const}$. Taką specjalną ζ-parę Zariskiego nazywamy *μ^*-parą Zariskiego osobliwości powierzchni.* Oczywiście, bycie μ^*-parą Zariskiego osobliwości powierzchni nie oznacza, że $V(g_0)$ i $V(g_1)$ mają różne topologie zanurzone. Jest to jednak *niezbędny* warunek i ważny krok w zrozumieniu problemu.

Pierwszym celem niniejszego projektu jest zbadanie analogicznego pytania dla stratu $\mu = \text{const}$. Dokładniej, pytamy, czy prawdą jest, że niezdegenerowanie w sensie Newtona osobliwości krzywych C_0 i C_1 implikuje również, że $(V(g_0), V(g_1))$ jest *μ-para Zariskiego osobliwości powierzchni* (czyli μ^*-para Zariskiego, dla której nie tylko g_0 i g_1 leżą w różnych łukowo spójnych składowych stratu $\mu^* = \text{const}$, ale także leżą w różnych łukowo spójnych składowych stratu $\mu = \text{const}$). Jest to znacznie silniejsze stwierdzenie.

Drugim celem tego projektu jest zbadanie problemów podobnych do wymienionych powyżej (zarówno dla μ^*, jak i μ), ale ogólniejszej sytuacji, gdzie (C_0, C_1) jest para Zariskiego krzywych rzutowych z *wagą*, w płaszczyźnie rzutowej z wagą.

Wreszcie, naszym trzecim i ostatnim celem jest zbadanie analogicznych problemów dla niektórych innych klas osobliwości powierzchni (tj. osobliwości, które nie są typu Lê-Yomdin (z wagą)).