Matematyka odwrotna to program badawczy w logice matematycznej rozwijany od lat 70. XX wieku. Jego celem jest zrozumienie, jakie aksjomaty dotyczące istnienia skomplikowanych nieskończonych zbiorów, funkcji nieobliczalnych i innych abstrakcyjnych obiektów sa niezbędne do udowodnienia konkretnych twierdzeń matematycznych. Ważne jest, by badane twierdzenia należały do „zwyczajnej matematyki": nie powinny to być bardzo zaawansowane twierdzenia abstrakcyjnej teorii mnogości, lecz użyteczne na co dzień wyniki, z którymi można się zetknąć np. w trakcie studiów licencjackich. By udowodnić, że dany aksjomat jest niezbędny do udowodnienia twierdzenia, dowodzi się, że *z twierdzenia wynika aksjomat* – stąd nazwa „ matematyka odwrotna". Ustalenie, jakie aksjomaty są naprawdę nieodzowne w celu udowodnienia poszczególnych twierdzeń, jest bardzo ciekawe z punktu widzenia filozofii matematyki, jako że pomaga nam zrozumieć strukturę logiczną matematyki jako całości, ale może także mieć zastosowania, np. mówiąc nam, że pewien obiekt można znaleźć za pomocą efektywnej procedury obliczeniowej albo że pewien fakt ma nieodkryty dotąd elementarny dowód. Ten obszar badawczy wzbudził już na tyle duże zainteresowanie, że w 2018 r. stał się tematem książki popularnonaukowej, *Reverse Mathematics. Proofs from the Inside Out* Johna Stillwella.

W dziejach matematyki odwrotnej można w uproszczeniu wyróżnić dwa okresy. W pierwszym z nich pokazano, że wiele twierdzeń ze wszystkich działów matematyki jest równoważnych jednemu z kilku typowych aksjomatów istnienia zbiorów, które tworzą liniowo uporządkowaną pod względem siły hierarchię. Następnie, mniej więcej od lat 90., logicy zaczęli odkrywać wiele twierdzeń, które nie są równoważne żadnemu z typowych aksjomatów, zwłaszcza wśród faktów z dziedziny kombinatoryki. Szczególnie znanym przypadkiem takiej „anomalii" jest twierdzenie Ramseya dla par i dwu kolorów, czyli twierdzenie mówiące, że dowolny nieskończony graf zawiera nieskończony podgraf, w którym albo wszystkie pary wierzchołków są połączone krawędziami, albo w ogóle nie ma żadnych krawędzi.

Jednym ze sposobów zrozumienia siły logicznej twierdzenia – albo aksjomatu – jest badanie jego *konsekwencji pierwszego rzędu*, czyli wynikających z niego faktów na temat obiektów skończonych (np. liczb naturalnych). Przykładowo, nadzwyczaj ważnym aksjomatem istnienia zbiorów jest Słaby Lemat Königa, który oficjalnie jest pewną tezą dotyczącą nieskończonych drzew, ale jest równoważny wielu twierdzeniom z różnych obszarów matematyki, np. faktowi, że jeśli przedział $[0, 1]$ jest zawarty w sumie nieskończenie wielu przedziałów otwartych, to jest też zawarty w sumie pewnych skończenie wielu spośród nich, ale też różnym twierdzeniom o istnieniu rozwiązań równań różniczkowych czy o istnieniu ideałów w pierścieniach. Wiadomo, że w ogólności nie da się udowodnić Słabego Lematu Königa w sposób algorytmiczny, tj. niekiedy obiekty istniejące na mocy tego aksjomatu nie mogą być obliczalne, ale z drugiej strony każde stwierdzenie na temat liczb naturalnych dowodliwe za pomocą Słabego Lematu Königa ma elementarny, „czysto rachunkowy" dowód.

W pracy opublikowanej w 2018 r., L. Patey and K. Yokoyama pokazali, że również dostatecznie proste fakty na temat liczb naturalnych, które można udowodnić za pomocą twierdzenia Ramseya, zawsze mają „rachunkowe" dowody nieodwołujące się do tego twierdzenia. Podanie pełnego opisu konsekwencji pierwszego rzędu twierdzenia Ramseya jest jednak bardzo znanym problemem otwartym. Wiadomo, że aby rozwiązać ten problem, trzeba lepiej zrozumieć *niestandardowe modele arytmetyki*, czyli struktury mające większość typowych własności zbioru liczb naturalnych, ale zawierające też liczby, które widziane spoza struktury są nieskończone, choć z punktu widzenia samej struktury wyglądają tak jak każda inna liczba naturalna.

Zadaniem wartym obecnie szczególnej uwagi jest opisanie, na jakie sposoby można rozszerzyć pewne specyficzne modele niestandardowe, spełniające tzw. zasadę kolekcji, tak by nie utracić ich podobieństwa do zwykłych, standardowych liczb naturalnych. Niedawno pokazaliśmy, że możliwości rozszerzania modeli kolekcji są bardziej ograniczone niż w przypadku innych rodzajów modeli niestandardowych, ale nasza obecna wiedza nie wystarcza do tego, by rozstrzygnąć, czy można te modele zawsze rozszerzyć tak, by spełniały twierdzenie Ramseya. W ramach naszego projektu będziemy badać szereg zagadnień związanych ze strukturą modeli niestandardowych – zarówno z ich rozszerzeniami takiego czy innego typu, jak i z odcinkami początkowymi. Zrozumienie modeli niestandardowych nie będzie dla nas jednak celem samym w sobie, ale narzędziem mającym służyć badaniu pytań o istnienie dowodów, dotyczących na przykład tego, czy dane twierdzenie (zwykle z kombinatoryki) implikuje jakiś aksjomat albo jakie są konsekwencje pierwszego rzędu danego twierdzenia.