OPERATORY CIĄGŁE I DYSKRETNE W TEORII SPEKTRALNEJ ORAZ ANALIZIE HARMONICZNEJ

Niniejszy projekt badawczy dotyczy związków między dyskretnymi i ciągłymi zjawiskami w obszarze teorii spektralnej i analizy harmonicznej. Te dwa działy matematyki odpowiadają dwóm głównym częściom projektu. Choć są one względnie niezależne od siebie, wykorzystywać będą blisko ze sobą związane metody i mają wspólne korzenie w rachunku prawdopodobieństwa.

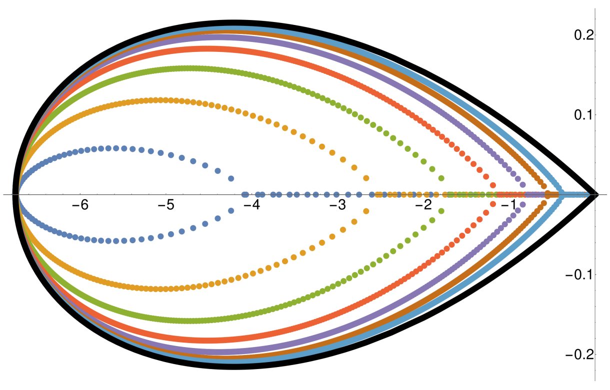
W części projektu dotyczącej teorii spektralnej zamierzamy przeanalizować własności pewnych operatorów liniowych, które pojawiają się w badaniach błądzeń losowych i powiązanych z nimi procesów z czasem ciągłym, nazywanych procesami Lévy'ego. Operatory te, znane pod nazwą *operatorów Toeplitza* oraz *operatorów Lévy'ego*, mają nietypowe własności: nie są *operatorami normalnymi*. Bardzo utrudnia to ich analizę przy pomocy standardowych metod. Naszym celem jest zrozumienie ich struktury poprzez rozwinięcie nowych technik matematycznych i zbadanie widm tych operatorów. Jedno z pytań, na które spróbujemy odpowiedzieć, ma związek z hipotezą Widoma, która podaje oczekiwane warunki, przy których wartości własne *macierzy Toeplitza* zbiegają do widma granicznego operatora Toeplitza (rys. 1).

Część projektu związana z analizą harmoniczną koncentruje się na dyskretnych odpowiednikach klasycznych operatorów w tej dziedzinie, nazywanych *całkami singularnymi* oraz *operatorami maksymalnymi*. Źródłem zaplanowanych w projekcie badań jest stuletni problem otwarty, dotyczący równości norm dyskretyzacji *transformaty Hilberta* H oraz norm operatora H. Niedawno odkryto probabilistyczną metodę dopasowaną do jednej z takich dyskretyzacji. Naszym celem jest uogólnienie tej techniki tak, aby objęła ona inne ważne operatory. Zbadamy także zastosowania tych operatorów w teorii procesów stochastycznych. W realizacji tego zadania potrzebna będzie dyfuzja w półpłaszczyźnie lub półprzestrzeni, która opuszcza ten obszar tylko poprzez punkty kratowe (rys. 2).

Oprócz powyższych głównych części projekt obejmuje trzy dodatkowe cele. Jednym z nich są badania dotyczące kształtu wektorów własnych macierzy Toeplitza. Innym celem jest badanie pojęcia *funkcji o kształcie dzwonu* oraz jego zastosowań w rachunku prawdopodobieństwa i w teorii spektralnej. Motywowani niedawnym postępem w teorii operatorów Lévy'ego, zamierzamy też skonstruować przestrzenie funkcji o szczególnych własnościach gładkości.

Pytania podnoszone w ramach tego projektu są częścią bardzo aktywnych dziedzin matematyki teoretycznej. Oczekujemy, że wyniki projektu znacząco poszerzą naszą wiedzę w zakresie teorii spektralnej operatorów nienormalnych i poprawią nasze rozumienie wzajemnych związków między dyskretną i ciągłą analizą harmoniczną, a być może otworzą też nowe kierunki badań.

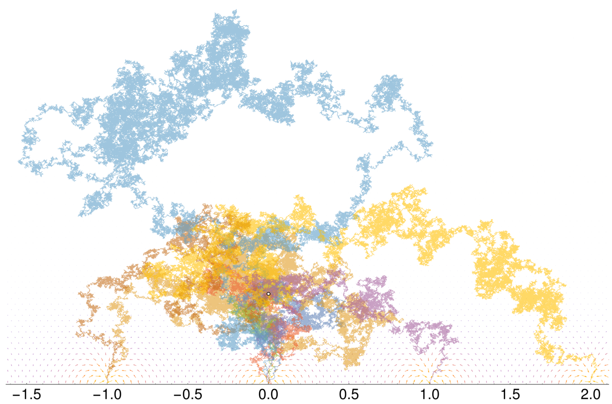
W ramach projektu badamy sposób, w jaki dyskretne i ciągłe pojęcia na siebie oddziałują i mamy nadzieję spojrzeć na nowo na kilka dawno postawionych problemów otwartych. Choć ich rozwiązanie nie jest bezpośrednim celem tego projektu, ma on przyczynić się do lepszego zrozumienia tych zagadnień.



Rysunek 1. Wartości własne macierzy Toeplitza rozmiaru 100, 200, 400, 800, 1600, 3200, 6400 o wyrazach

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1.1|i-j|^{-1.5} & \text{gdy } i > j, \\ 0.9|i-j|^{-1.5} & \text{gdy } i < j, \\ -2\zeta(1.5) & \text{gdy } i = j \end{cases}$$

(kolorowe punkty) i oczekiwana granica (czarna linia).



Rysunek 2. Dziewięć typowych trajektorii ruchu Browna w półpłaszczyźnie zmuszonego do uderzenia w brzeg w punkcie o całkowitej współczędnej.