

Martyngały i Operatory Wieloliniowe **POPULARNONAUKOWE STRESZCZENIE PROJEKTU**

Martyngały tworzą klasę procesów stochastycznych odgrywających fundamentalną rolę w teorii całki stochastycznej w przypadku dyskretnym i ciągłym. Teoria ta jest jednym z podstawowych narzędzi w zastosowaniach, m.in. dla modelowania stochastycznego i matematyki finansowej, i posiada niebagatelne znaczenie w innych dziedzinach takich jak analiza harmoniczna i analiza funkcjonalna. Z punktu widzenia wspomnianych zastosowań, ważnym tematem badań są nierówności dla martyngałów i różnych obiektów z nimi powiązanych (np. funkcji maksymalnych czy funkcji kwadratowych). Wyniki tego typu odgrywają istotną rolę m.in. z teoretycznych powodów - przykładowo, umożliwiają one użycie twierdzeń granicznych i gwarantują poprawną określoność odpowiednich wielkości. Dział teorii martyngałów, poświęcony badaniu różnych oszacowań, jest odrębną i intensywnie rozwijającą się dziedziną już od prawie stu lat.

Celem projektu jest zbadanie wzajemnych powiązań pomiędzy teorią martyngałów, a raczej procesów typu martyngałowego, a teorią operatorów pojawiających się w naturalny sposób w analizie harmonicznej, m.in. funkcji maksymalnych i całek singularnych. Analityczny kontekst, w którym wspomniane operatory mają liniowy charakter, był już intensywnie badany i wzajemne probabilistyczno-analityczne zależności są już dobrze rozumiane. Główny nacisk planowanych badań będzie położony na przypadek wieloliniowy; w szczególności, jednym z celów projektu jest rozwinięcie nowych metod badawczych w powyższej tematyce. Teoria wieloliniowych operatorów jest stosunkowo nową dziedziną badań, motywowaną zastosowaniami m.in. w teorii eliptycznych i dyspersyjnych równań różniczkowych, teorii ergodycznej i analizą zespoloną. Pierwsze prace w tym kierunku uzyskano około dwadzieścia lat temu, a intensywny rozwój etmatyki zaobserwowano w trakcie ostatniej dekady.

Badania będą prowadzone także w ogólniejszym, nieprzemiennym przypadku, w którym funkcje (do których przykładane są zadane operatory) zastępuje się elementami ustalonej algebry von Neumanna. Warto wspomnieć o dwóch ważnych aspektach związanych z rozważaniami w sytuacji nieprzemiennej. Jednym z głównych problemów jest mała liczba technicznych narzędzi, które mogą być używane w badaniach: większość punktowych oszacowań, nawet po obłożeniu śladem, przestaje być prawdziwa po przejściu z klasycznego do niekomutatywnego przypadku. To zaś często uniemożliwia bezpośrednie przeniesienie analizy i wymaga wypracowania nowych metod - w konsekwencji, badania są trudniejsze i bardziej interesujące. Z drugiej strony, przejście do nieprzemiennej sytuacji często ujawnia nieoczekiwane zjawiska, np. pewne wielkości przestają być porównywalne; niektóre klasyczne obiekty dają się rozszerzyć na kilka różnych (sensownych) sposobów; stałe w pewnych oszacowaniach zaczynają zachowywać się w zupełnie inny sposób, odsłaniając ukrytą przeszkodę tkwiącą w teorii operatorów.

Projekt zakłada badania w czterech wyróżnionych kierunkach, które są istotne z punktu widzenia dalszego rozwoju dziedziny. Obejmują one rozważania dotyczące własności wieloliniowych wag Muckenhoupta - ważnych nieujemnych funkcji spełniających pewien warunek zrównoważenia; badanie wybranych nierówności z wagą dla wieloliniowych funkcji maksymalnych i całek singularnych; badanie wieloliniowych związków pomiędzy silnie dominowanymi martyngałami a mnożnikami Lévy'ego; wreszcie, rozważania dotyczące oszacowań dla wieloliniowych nieprzemiennych operatorów.