Zastosowania multiporządków i pseudometryki f-bar do badania działań przeliczalnych grup ze średnią

Streszczenie popularnonaukowe

Teoria ergodyczna i dynamika topologiczna zostały pierwotnie opracowane dla działań grupy liczb całkowitych $\mathbb{Z}$. Dlatego wiele klasycznych wyników i dowodów wykorzystuje w szerokim zakresie naturalny porządek $<$ na tej grupie, tzn. „kierunek czasu". Zwróćmy uwagę, że porządek ten jest *niezmienniczy*, tzn. $n < m$ implikuje, że dla dowolnego k całkowietgo mamy $k+n < k+m$. To pozwala nam wprowadzić intuicyjnie jasne pojęcia „przeszłości" i „przyszłości", które odgrywają fundamentalną rolę w wielu aspektach badań nad klasycznymi układami dynamicznymi.

Jedną z trudności, na jakie napotykamy przy rozszerzaniu teorii ergodycznej z działań $\mathbb{Z}$ na wieloparametrowe działania innych przeliczalnych grup, w szczególności na działania przeliczalnych grup ze średnią, jest to, że ten „kierunek czasu" — i wynikająca z niego matematyka — zostają utracone. W pełnej ogólności nie ma bowiem niezmienniczego porządku na grupie, zatem pojęcia „przeszłości", czy „przyszłości" tracą sens. Niemniej jednak, nadal można otrzymać wiele twierdzeń teorii ergodycznej i dynamiki topologicznej dla działań grup ze średnią (a nawet dla działań grup soficznych), ale tylko w zakresie nie wymagającym czasu skierowanego.

Multiporządek jest nowym narzędziem wprowadzonym przez Downarowicza (kierownika niniejszego projektu), Oprochę, Więcka i Zhanga. Jest on wersją *losowego porządku niezmienniczego* (IRO – od angielskiego *invariant random order*) wprowadzonego wiele lat temu przez Johna Kieffera. Z grubsza rzecz biorąc, IRO jest rodziną porządków $\{<_\alpha\}$ na grupie G, która jest łącznie niezmiennicza, tzn. jeśli $g <_\alpha h$ $(g, h \in G)$, to $kg <_\beta kh$, gdzie α i β są odpowiednio powiązane (szczegóły tej zależności pominiemy). Multiporządek jest rodzajem IRO spełniającym dodatkowe wymaganie, żeby wszystkie porządki były typu $\mathbb{Z}$, to znaczy porządkowały identycznie jak grupa liczb całkowitych $\mathbb{Z}$ jest uporządkowana przez zwykłą nierówność $<$. Multiporządek pozwala wyznaczyć „przeszłość" i „przyszłość" każdej orbity w dokładnie takim samym stylu jak to się robi dla klasycznych działań grupy $\mathbb{Z}$. De facto, multiporządek indukuje orbitalną równoważność z działaniem grupy liczb całkowitych $\mathbb{Z}$ z dodatkowymi dobrymi własnościami, takimi jak zachowanie przeszłości i przyszłości orbit, zachowanie entropii warunkowej i wieloma innymi. W szczególności pozwala on efektywnie identyfikować faktor Pinskera (czyli maksymalny factor o zerowej entropii) w dowolnym działaniu teorio-miarowym przeliczalnej grupy ze średnią.

Pseudometryka f-bar jest narzędziem w dynamice symbolicznej działań $\mathbb{Z}$, które okazało się przydatne m.in. do charakteryzowania topologicznych modeli układów luźno bernoullowskich o entropii zero (tj. układów równoważnych w sensie Kakutaniego układom Kroneckera). Jest to rzadka sytuacja, gdy modele topologiczne pewnej klasy teorio-miarowej mogą być zidentyfikowane za pomocą metod czysto topologicznych.

Naszym głównym zamiarem jest połączenie tych dwóch technik i zaadaptowanie pseudometryki f-bar (która z definicji odnosi się do orbit uporządkowanych wzdłuż $\mathbb{Z}$) do działań przeliczalnych grup ze średnią. Przejście to powinno być możliwe poprzez uporządkowanie orbit zgodnie z multiporządkiem lub, być może, poprzez przejście do orbitalnie równoważnego działania grupy liczb całkowitych $\mathbb{Z}$. Gdy taka adaptacja się powiedzie, zamierzamy skupić się na kilku problemach, poczynając od bardzo ogólnych pytań dotyczących samych multiporządków, przechodząc do bardziej szczegółowych zadań związanych z ogólnymi zastosowaniami multioporządków w działaniach grupy G, a kończąc na zagadnieniach związanych z zastosowaniami (miejmy nadzieję, że udanie zaadaptowanej) pseudometryki f-bar w kontekście układów luźno Bernoullowskich.