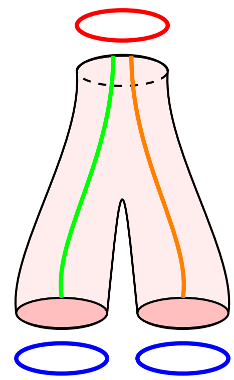
Nr rejestracyjny: 2022/47/B/ST1/01896; Kierownik projektu: prof. dr hab. Jarosław Antoni Wiśniewski

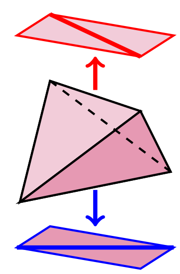
Geometria biwymierna i eliptyczne niezmienniki kohomologiczne
Opis popularno–naukowy

Obrazek w sposób popularny ilustruje teorię Marstona Morse'a: para spodni reprezentuje topologiczny kobordyzm, który łączy okrąg na górze z parą okręgów na dole. Dwie krople wody mające źródło w pobliskich punktach spływając po spodniach docierają do różnych okręgów. Zjawisko to pokazuje, że w pewnych okolicznościach niewielkie zmiany parametrów mogą mieć znaczące skutki.

Figury na górnym rysunku to *rozmaitości topologiczne*, z matematycznego punktu widzenia są bardzo prostymi obiektami. Są one bazą, na której można zbudować znacznie subtelniejsze struktury. Niniejszy projekt koncentruje się na *rozmaitościach algebraicznych*, które są tworami o wiele bogatszymi i mogą służyć do opisu złożonych zjawisk.



Geometria algebraiczna jest centralną gałęzią współczesnej matematyki. Jej korzenie tkwią w geometrii klasycznej i różniczkowej, analizie, topologii i algebrze przemiennej. Badania prowadzone w ramach geometrii algebraicznej są inspirowane istotnymi zastosowaniami w innych gałęziach matematyki, fizyki teoretycznej, statystyki, biologii obliczeniowej, informatyki i inżynierii.



Z drugiej strony geometria algebraiczna wykorzystuje wiele metod wywodzących się między innymi z topologii, analizy i dyskretnej matematyki. W istocie niniejszy projekt koncentruje się na zrozumieniu specjalnych struktur algebraicznych, poprzez obliczenie ich niezmienników topologicznych, *klas charakterystycznych* i wykorzystaniu metod wzorowanych na metodach topologicznych.

Operacje geometryczne będące daleko idącym uogólnieniem topologicznego kobordyzmu można zorganizować w strukturę algebraiczną. Atomy tej struktury (*operacje Demazura-Lusztiga*) to przepisy na budowanie rozmaitości coraz wyższych wymiarów. Inne modyfikacje pochodzą od *działania torusa*. Otrzymana algebra operacji jest wcieleniem tak zwanej *algebry Hecke*. Ten rodzaj algebry może służyć jako narzędzie obliczające niezmienniki geometrycznych obiektów. Chcemy rozszerzyć zastosowanie algebry Hecke poza dobrze znaną domenę *przestrzeni jednorodnych* i wykorzystać w nowej sytuacji: w obliczeniach klas eliptycznych charakterystycznych *orbit nilpotentnych*. Relacje między różnymi kompozycjami operacji Demazure-Lusztiga zostaną zinterpretowane jako kobordyzmy algebraiczne. W ten sposób niedostępnym, wielowymiarowym obiektom geometrycznym zostanie nadana hierarchia rządzoną przez kombinatorykę. Metody algebraiczne pozwolą na reprezentację obiektów geometrycznych w stosunkowo łatwy sposób.

Dla przykładu, dolny rysunek przedstawia algebraiczny kobordyzm Morellego–Włodarczyka jako algebraiczny odpowiednik pary spodni. Czworościan pośrodku reprezentuje 4-wymiarową przestrzeń, podczas gdy górny i dolny romb, na który rzutowany jest czworościan, reprezentują fragmenty trójwymiarowych rozmaitości algebraicznych. Reprezentują one dwa różne rozwiązania trójwymiarowej osobliwości $x_1y_1 + x_2y_2 = 0$. Modyfikacja reprezentowana przez różne wybory przekątnej w rombie ilustruje podstawową *biwymierną modyfikację* rozmaitości, *flop Atiyah'a*.