

STRESZCZENIE POPULARNONAUKOWE

Pojęcie *grup* jest klasycznym pojęciem, zajmującym centralną rolę w matematyce teoretycznej. Służy ono do opisu symetrii danego obiektu.

Oprócz matematyki, grupy i symetrie mają również podstawowe znaczenie w naukach przyrodniczych. W fizyce grupy pomagają nam zrozumieć Wszechświat i są kluczowe, na przykład, w teorii strun. W chemii symetrie można wykorzystać do rozróżnienia stereoizomerów oraz opisanie ich różnych własności chemicznych. W biologii grupy są szeroko stosowane w badaniach kapsydów („skorup”) wirusów.

Doprowadziło to do rozwoju dziedziny matematyki zwanej *teorią grup*. W tej dziedzinie badamy (z matematycznego punktu widzenia) struktury algebraiczne utworzone ze wszystkich symetrii danego obiektu. Niniejszy projekt dotyczy badań w zakresie teorii grup.

Chociaż niektóre obiekty, takie jak cząsteczki lub kapsydy wirusów, mają skończone grupy symetrii, istnieją również obiekty matematyczne, które mają nieskończenie wiele symetrii, takie jak nieskończona 2-wymiarowa siatka lub cała 3-wymiarowa przestrzeń. To motywuje badanie nieskończonych grup. Okazuje się, że takie grupy można badać nie tylko jako obiekty algebraiczne, ale także geometryczne, w szczególności wykorzystując pojęcie *krzywizny*, zapożyczone z geometrii różniczkowej (obiekty płaskie, takie jak blat stołu, mają krzywiznę zerową, a kula, taka jak powierzchnia piłki, ma krzywiznę dodatnią). Szczególnie interesujące są grupy związane z przestrzeniami *niedodatnio zakrzywionymi* (ang. non-positively curved, NPC); była to główna motywacja w dziedzinie badań znanej jako geometryczna teoria grup – stosunkowo młodej dziedzinie współczesnej matematyki, wynalezionej 40 lat temu na przecięciu algebry abstrakcyjnej, geometrii różniczkowej, kombinatoryki oraz topologii algebraicznej.

W tym projekcie koncentrujemy się również na badaniu klasy grup znanej jako *grupy biautomatyczne*, motywowanej teorią *automatów* znajdującą się w dziedzinie informatyki. Z grubsza są to grupy, dla których istnieje algorytm (lub „automat”) wyliczący symetrie leżące w tych grupach, oraz inne automaty opisujące algebraiczne relacje między tymi symetriami. Taki opis pozwala na wykonanie wydajnych obliczeń w grupach biautomatycznych, zapewniając lepsze zrozumienie tej rodziny.

Chociaż definicja grup biautomatycznych leży głównie na przecięciu algebry, kombinatoryki i informatyki, metody geometryczne, takie jak niedodatnia krzywizna, okazały się nadzwyczaj przydatne w badaniach tych grup. W szczególności, istnieje wiele grup symetrii przestrzeni NPC, które są biautomatyczne, natomiast mnóstwo własności grup, które są powszechne w badaniu niedodatniej krzywizny, jest również znanych w kontekście grup biautomatycznych. Niemniej jednak, w niektórych przypadkach taka zależność jest bardziej skomplikowana, co niedawno zostało zilustrowane przez konstrukcję I. J. Leary’ego i A. Minasyana niebiautomatycznych grup symetrii przestrzeni niedodatnio zakrzywionych, odpowiadającą od dawna otwarte pytanie w geometrycznej teorii grup.

Celem niniejszego projektu badawczego jest porównanie i przeciwstawienie klas grup biautomatycznych oraz grup symetrii przestrzeni NPC. Z jednej strony własność biautomatyczności może dać wgląd w różne grupy, takie jak *grupy Artina* – rodzina szeroko badana w geometrycznej teorii grup, chociaż nie dobrze poznana poza pewnymi określonymi podrodzinami. Z drugiej strony naszym celem jest również opracowanie nowych metod pracy ze wszystkimi grupami biautomatycznymi, pozwalających znaleźć dalszych podobieństw między nimi a technikami używanymi do badania krzywizny niedodatniej. Takie wyniki mogą pogłębić nasze rozumienie symetrii, a także jej roli w matematyce, naukach przyrodniczych oraz informatyce.