Wewnętrzna ergodyczność i jednoznaczność stanów równowagi w układach dynamicznych

(Popularnonaukowe streszczenie projektu)

Nauki przyrodnicze i społeczne używają matematyki, aby otrzymać modele, czyli opisy zjawisk zachodzących w otaczającym nas świecie zapisane przy pomocy równań i funkcji. *Układy dynamiczne* to modele, które opisują procesy zmieniające się w czasie lub w przestrzeni. Ich analiza pomaga w zrozumieniu i przewidywaniu ewolucji opisanych przez nie procesów.

Najlepsza możliwa sytuacja jaka może wystąpić przy badaniu układów dynamicznych zachodzi wtedy, gdy potrafimy przeprowadzić klasyfikację wszystkich możliwych wyników symulacji takich procesów z dowolną dokładnością. Dzięki temu poznajemy wszystkie możliwe wyniki ewolucji procesu jakie mogą zajść w przyszłości. W pewnym sensie klasyfikacja taka to ostateczny cel teorii układów dynamicznych, a dokładniej, tworząc tę teorię staramy się opisać wszystkie możliwe układy dynamiczne.

Oczywiście w pełnej ogólności nigdy się nam to nie uda, ale w pewnych przypadkach coś potrafimy powiedzieć. Aby coś osiągnąć często musimy jednak ograniczyć uwagę do konkretnych rodzin układów dynamicznych.

Powszechnie stosowanym i skutecznym sposobem uzyskiwania użytecznych metod klasyfikacji układów dynamicznych jest następująca procedura: po pierwsze, musimy określić, kiedy uznajemy dwa układy dynamiczne za takie same (w tym przypadku powiemy również, że te dwa układy są *izomorficzne*). Dwoma najważniejszymi rodzajami izomorfizmu są pojęcia *sprzężenia topologicznego* oraz *izomorfizmu teoriomiarowego*. Po drugie, musimy znaleźć pewne własności układów dynamicznych, które nie zmieniają się przy przejściu od jednego układu do układu z nim izomorficznego. Takie własności nazywane są *dynamicznymi niezmiennikami* i zwykle odzwierciedlają różne rodzaje zachowania układu dynamicznego oraz jego złożoności. W najlepszym możliwym przypadku niezmienniki te można wyrazić jako pojedynczą liczbę przypisaną do danego układu. Zauważmy, że jeżeli wartość pewnego niezmiennika jest różna dla danych dwóch układów dynamicznych, to układy te nie mogą być izomorficzne.

Jednym z najczęściej stosowanych niezmienników dynamicznych jest *entropia*. stanowi ona miarę nieporządku występującego w układzie dynamicznym poprzez ilościowe określenie wykładniczej stopy wzrostu liczby stanów początkowych, którą można rozdzielić w ramach określonej dokładności w miarę upływu czasu przy rosnącej rozdzielczości. Mówiąc ogólnie, entropia mierzy jak bardzo *złożona* jest dynamika badanego zjawiska. *Entropia topologiczna* układu dynamicznego bada, ile różnych orbit jesteśmy w stanie zaobserwować, jeżeli dysponujemy urządzeniem o asymptotycznie doskonałej zdolności rozdzielczej. *Entropia dynamiczna* miary niezmienniczej jest tym większa, im bardziej skomplikowana jest dynamika układu, jeżeli bierzemy pod uwagę tylko to, co dzieje się na dużym zbiorze (względem tej miary). Wiadomo, że entropia topologiczna jest ograniczona z dołu przez *entropię dynamiczną* każdej miary niezmienniczej i może być dowolnie dobrze przybliżana przez entropie takich miar. Miary, których entropia ma maksymalną wartość dla danego układu nazywamy *miarami o maksymalnej entropii*.

Tematem przewodnim projektu jest badania warunków koniecznych i dostatecznych na istnienie i jednoznaczność miar o maksymalnej entropii oraz podobnie zdefiniowanych stanów równowagi. Uzyskawszy istnienie i jedyność będziemy badali własności tak wyszczególnionych miar. Poznanie własności tych szczególnych miar niezmienniczych pomaga w zrozumieniu dynamiki zjawiska, które opisują.