Struktura i algorytmy dla klas grafów definiowanych przez własności zamknięte na transdukcje

Jakub Gajarský

Główna motywacja tego projektu bierze się z rozważania algorytmicznych meta-twierdzeń, czyli wyników postaci: Każdy problem pewnego typu może być rozwiązany efektywnie na pewnych klasach danych wejściowych. Takie wyniki są bardzo użyteczne, ponieważ pozwalają na stwierdzenie istnienia efektywnych algorytmów dla wielu problemów na raz. Ten pomysł sprawdził się szczególnie dobrze w przypadku, kiedy rozważamy problemy definiowalne w języku pewnej logiki, a dane wejściowe pochodzą z jakiejś klasy grafów o dobrych własnościach strukturalnych. W tym przypadku algorytmiczne meta-twierdzenia mają następującą postać: Każdy problem dający wyrazić się w języku pewnej logiki można rozwiązać efektywnie dla wejść z pewnej klasy grafów. Kiedy udowodnimy takie meta-twierdzenie, żeby pokazać istnienie efektywnego algorytmu dla pewnego problemu, wystarczy wyrazić ten problem w języku logiki, o której mowa w meta-twierdzeniu. Ta definicja może zostać następnie zamieniona na efektywny algorytm.

Najsłynniejszym meta-twierdzeniem tego typu jest twierdzenie Courcelle'a z 1990 roku. Mówi ono, że każdy problem wyrażalny w monadycznej logice drugiego rzędu (ang. *monadic second-order logic, MSO*) może być rozwiązany w czasie liniowym na klasach grafów o ograniczonej szerokości drzewiastej (ang. *treewidth*). O ile samo twierdzenie jest silne i użyteczne, jego głównym mankamentem jest fakt, że klasy grafów o ograniczonej szerokości drzewiastej są dość wąskie i nie ma dobrego sposobu na rozszerzenie twierdzenia do klas grafów o nieograniczonej szerokości drzewiastej (poza wartym odnotowania wyjątkiem klas grafów o ograniczonej szerokości klikowej (ang. *clique-width*), jednak takie klasy również są dość wąskie). Naturalnym sposobem poradzenia sobie z tym problemem jest rozważanie bardziej restrykcyjnej logiki pierwszego rzędu (ang. *first-order logic, FO*); to właśnie ta logika jest przedmiotem zainteresowania projektu. Logika pierwszego rzędu jest istotnie słabsza niż monadyczna logika drugiego rzędu (tj. możemy w niej wyrazić mniej problemów), ale pozwala nam na udowodnienie meta-twierdzeń dla znacznie bogatszej klasy wejść (dużo bardziej ogólnych klas grafów). W ciągu ostatnich 25 lat bardzo obszernie badany był problem, na których klasach grafów można efektywnie rozwiązać problemy wyrażalne w logice pierwszego rzędu. Początkowo nacisk kładziony był głównie na badanie rzadkich klas grafów. Ten kierunek obfitował w sukcesy, których kulminacją był udowodniony w 2014 roku wynik Grohego, Kreutzera i Siebertza – pokazali oni, że każdy problem wyrażalny w logice pierwszego rzędu może być efektywnie rozwiązany na każdej rzadkiej (formalnie nigdzie gęstej, ang. *nowhere dense*) klasie grafów.

Niedługo później zainteresowania badaczy przesunęły się do bardziej ogólnych klas grafów, które niekoniecznie muszą być rzadkie. Szczególnym zainteresowaniem cieszą się klasy grafów zamknięte na transdukcje (ang. *transductions*), czyli pewne transformacje grafów, które zakorzenione są w logice i które mogą być użyte do zdefiniowania nowych klas grafów ze starych. Okazało się to być owocnym kierunkiem badań, który mocno rozwinął się w ostatnich latach i spodziewa się, że pozostanie aktywnym obszarem w przyszłości.

W tym projekcie zajmiemy się badaniem strukturalnych, kombinatorycznych i algorytmicznych problemów związanych z klasami grafów zamkniętymi na transdukcje. W szczególności będziemy zainteresowani identyfikowaniem i analizowaniem różnych strukturalnych własności, które takie klasy grafów mają. Takie własności mogą być następnie użyte na przykład do pokazania istnienia pewnych dekompozycji dla grafów z danej klasy grafów, pokazania algorytmów do obliczania takich dekompozycji i do rozwijania narzędzi logiki, które następnie pozwolą nam udowadniać nowe algorytmiczne meta-twierdzenia.