

Wyobraźmy sobie dwuwymiarową powierzchnię, której brzegiem jest zwykły okrąg. Intuicyjnie oczywiste jest, że wśród takich powierzchni płaski dysk jest tym, który ma minimalne pole, ale formalny dowód nie jest taki prosty. Ponadto rozważamy pewne przestrzenie anizotropowe, w których wartość pola powierzchni zależy od nachylenia. Oznacza to, że pole płaskiego dysku zmienia się, gdy obracamy go wokół pewnej osi. Aby było jeszcze ciekawiej umieszczamy wszystko w przestrzeni otaczającej o dowolnie dużym wymiarze n i rozważamy również „powierzchnie” o dowolnym wymiarze k . Brzeg jest zawsze stały i musi być sferą $(k - 1)$ -wymiarową. Przy tych wszystkich uogólnieniach problem opisu minimów powierzchni staje się naprawdę trudny (co raczej cieszy matematyków). Dla $k = 2$ i $n = 4$ problem został rozwiązany dopiero w 2012 roku. Dla innych wyborów k problem jest otwarty.

W rzeczywistości jest jeszcze więcej niuansów. Mając daną funkcję (normę), która oblicza anizotropową długość wektora (tzn. obroty mogą zmienić długość) można skonstruować wiele sensownych i znaczących pojęć k -wymiarowego pola powierzchni. Pierwszym moim celem jest opisanie tych anizotropowych pojęć pola powierzchni, dla których płaski dysk minimalizuje powierzchnię spośród tych, których brzegiem jest ustalona $(k - 1)$ -sfera. Będę je nazywał *eliptycznymi*. **Zrozumienie głębszej natury eliptyczności jest głównym dalekosiężnym celem projektu** i może prowadzić do odpowiedzi na inne długo otwarte pytania, z których część jest przedstawiona poniżej.

Dowolna funkcja F obliczająca pewien rodzaj (anizotropowego) k -pola powierzchni wyznacza (przez proces różniczkowania) pojęcie średniej F -krzywizny. Przyjmijmy, że pewna powierzchnia Σ leży wewnątrz obszaru U i dotyka brzegu U w jakimś punkcie p . Intuicyjnie, pojęcie krzywizny opisuje, jak szybko powierzchnia się wygina, więc Σ powinna mieć większą krzywiznę niż brzeg U w punkcie p . Tego typu porównanie nazywane jest *zasadą maksimum* i wiadomo, że obowiązuje dla klasycznego pojęcia krzywizny. W przypadku anizotropowym zasada maksimum jest udowodniona tylko w kowymiarze jeden, tzn. jeśli $n - k = 1$. W wyższych kowymiarach problem jest otwarty – w szczególności, że pojęcie średniej F -krzywizny zależy również od wymiaru k i nie wiadomo, jak porównywać krzywizny obiektów o różnych wymiarach.

Jeśli średnia F -krzywizna powierzchni Σ jest globalnie ograniczona, to ta powierzchnia nie powinna się zbyt szybko wyginać w żadnym punkcie. To ewentualnie wyklucza długie i bardzo cienkie macki lub przynajmniej powinno dawać ograniczenie na ich grubość. Jeśli tak jest, to istnieje promień $R > 0$ taki, że przecięcie Σ z dowolną kulą o środku w Σ i promieniu $0 < r < R$ musi mieć k -pole powierzchni proporcjonalne do r^k . Jest to prawda dla zwykłego pojęcia k -pola powierzchni, ale nie jest znany dowód dla innych anizotropowych k -pól powierzchni. Jest to w istocie bardzo ważne pytanie, które powstrzymuje dalszy rozwój szerszej teorii.

Nieco subtelniejszym problemem otwartym, jest sama definicja średniej F -krzywizny w przypadku, gdy F nie jest różniczkowalna. Jest to szczególnie ważne, gdyż takie F są wykorzystywane do modelowania np. ciekłych kryształów.