OSZACOWANIA NIEZALEŻNE OD WYMIARU W ANALIZIE HARMONICZNEJ I POZA NIĄ

Badania zaproponowane w projekcie dotyczą matematyki teoretycznej i leżą w głównym nurcie analizy harmonicznej. Analiza harmoniczna (lub analiza fourierowska), to dział matematyki wyrosły z teorii szeregów Fouriera. Jej główną ideą jest rozkład badanego obiektu na sumę prostszych składowych. Metody analizy harmonicznej znajdują szerokie zastosowanie nie tylko w matematyce, ale i w technologiach codziennego użytku: w tomografii komputerowej, kompresji danych (format MP3 i JPEG), czy przetwarzaniu sygnałów (np. radiowych). Nasz projekt dotyczy tak zwanych oszacowań niezależnych od wymiaru w analizie harmonicznej, w tym zastosowania tych oszacowań i metod ich dowodzenia do innych zagadnień matematyki.

W nowoczesnej analizie matematycznej badacze często pytają o ograniczoność różnych operatorów liniowych lub podliniowych w d-wymiarowej przestrzeni. Zwykle, nawet, gdy badane operatory są ograniczone, nie mamy kontroli nad tym ograniczeniem przy zwiększaniu wymiaru d. Jednym z głównych celów tego projektu badawczego jest zbadanie sytuacji w których mamy jednak kontrolę nad ograniczeniem badanego operatora gdy wymiar d rośnie. Mówimy wtedy, że występują oszacowania niezależne od wymiaru. W naszym projekcie takie oszacowania są badane głównie dla pewnych naturalnych średnich Hardy'ego-Littlewooda związanych z wysoko-wymiarowymi zbiorami wypukłymi.

Podobnie, w niektórych problemach teorii liczb istotny jest aspekt zależności od wymiaru. Rozważmy na przykład problem znalezienia liczby rozwiązań w liczbach naturalnych równania $x_1^2 + ... + x_d^2 = N^2$. Zagadnienie to znane jest jako problem Waringa a związane z nim pytania są badane przez matematyków od kilku wieków. Ilość rozwiązań problemu Waringa zależy nie tylko od N ale także od wymiaru d. Asymptotyka rozwiązania dla bardzo dużych N jest znana od około 100 lat. Nie jest jednak jasne co się dzieje gdy N jest średniej lub małej wielkości w porównaniu z d. Zbadanie tego zagadnienia, między innymi przy użyciu metod analizy harmonicznej, jest kolejnym celem naszego projektu badawczego.

W ostatnich latach nastąpił dynamiczny rozwój metod analizy fourierowskiej funkcji boolowskich. Dziedzina ta znajduje zastosowanie między innymi w aspektach informatyki teoretycznej związanych z obliczeniami kwantowymi. Pojawiające się tu pytania często dotyczą oszacowań niezależnych od wymiaru dla odpowiednich obiektów - operatorów związanych z dyskretnym operatorem Laplace'a. W naszym projekcie zajmujemy się również tego typu problemami.

Powyższe zagadnienia mogą się wydawać wysoce abstrakcyjne. Związane są one jednak z bliższymi zastosowaniom zagadnieniami matematycznymi - tymi, które badają modele z dużą ilością parametrów. Dla przykładu tego typu zagadnienia pojawiają się w analizie danych i uczeniu maszynowym i związane są z tzw. 'przekleństwem wymiarowości'. Modele z dużą ilością parametrów są też istotne w rachunku prawdopodobieństwa i statystyce gdzie pomocne jest często zjawisko 'koncentracji miary'. Ich zastosowania praktyczne obejmują m.in.: przewidywanie makroskopowego zachowania układów fizycznych złożonych z dużej liczby cząstek, skrócenie pomiarów medycznych, a także szybkie przetwarzanie danych. Istotą zastosowania tych teorii w praktyce są często odpowiednie oszacowania - niezależne od wymiaru przestrzeni (ilości parametrów). Są to oszacowania dokładnie tego rodzaju jakie będą badane w naszym projekcie z punktu widzenia analizy harmonicznej. Ze względu na zbliżone metody i cele nasz projekt badawczy może pośrednio pomóc w powyższych dziedzinach.