Logiczne i epistemologiczne kryteria naturalności w podstawach matematyki

Głównym celem projektu jest lepsze zrozumienie asymetrii pomiędzy dwoma rodzajami teorii badanych w podstawach matematyki: teoriami *naturalnymi* (lub: *istotnymi*) z jednej oraz *sztucznymi* (lub *ad hoc*) z drugiej strony. Nasz projekt wpisuje się w nurt filozofii formalnej, w której aparat współczesnej matematyki wykorzystywany jest do modelowania i wyjaśniania problemów filozoficznych.

Z punktu widzenia logiki formalnej *teorią* może być nazwany właściwie dowolny zbiór zdań. Takie podejście jednak nie chwyta podstawowych intuicji naukowych, zgodnie z którymi każda teoria powinna być *teorią czegoś*: powinna opisywać jakieś zjawisko, modelować związki pomiędzy pewnymi pojęciami lub przynajmniej częściowo spełniać jeden z tych warunków. Wiele teorii, które są badane w podstawach matematyki spełnia to kryterium: pojawiają się jako wynik analizy struktury liczb naturalnych (takie jak np. kanoniczna teoria liczb naturalnych, czyli Arytmetyka Peana, PA), podstawowych rezultatów analizy matematycznej (jak np. podsystemy Arytmetyki Drugiego Rzędu), badań nad pojęciem prawdy (Aksjomatyczne Teorie Prawdy) lub hierarchią zbiorów (teoria mnogości Zermelo-Fraenkla lub teoria klas von-Neumanna–Gödla–Bernaysa). Teorie takie nazywa się często istotnymi lub naturalnymi.

Czy *każda* teoria rozważana w podstawach matematyki jest podobnie naturalna, co teorie wymienione powyżej? Skupmy się teraz na teoriach w logice pierwszego rzędu, których niesprzeczność na obecnym stadium rozwoju nauki nie jest kwestionowana. W pewnym sensie każda niesprzeczna teoria w logice pierwszego rzędu jest *o czymś*: na mocy klasycznego i podstawowego dla logiki matematycznej twierdzenia o pełności, dla każdej niesprzecznej teorii będziemy w stanie wyznaczyć precyzyjnie zdefiniowaną strukturę, w której wszystkie aksjomaty tej teorii będą prawdziwe. Pomimo tego, samo kryterium niesprzeczności wydaje się zbyt słabe: istnieje wiele niesprzecznych teorii, którym ewidentnie brakuje głębszej filozoficznej motywacji i zdają się być jedynie sztucznie dobranymi niesprzecznymi zbiorami zdań. Najczęściej pojawiają się jako kontrprzykłady dla intuicyjnych hipotez, stawianych na podstawie doświadczeń naukowców z pracy z naturalnymi teoriami. Na przykład: powyższa lista naturalnych teorii (po uwzględnieniu podstawowych wyników dyscypliny) nasuwa następujące przypuszczenie: każda naturalna teoria U ma bezpośrednią następniczkę, tj. naturalną teorię V, która jest ściśle silniejsza od U, ale pomiędzy U i V nie ma już żadnej teorii. Zatem, czy *każda* teoria ma bezpośrednią następniczkę w tym sensie? Zdecydowanie *nie*: dla przykładu, nie istnieje najsłabsze niesprzeczne właściwe rozszerzenie PA (zatem można wskazać nieskończenie wiele teorii, których "infimum" jest PA). Co więcej, istnieją niesprzeczne rozszerzenia PA, które uporządkowane pod względem siły logicznej mają strukturę zwykłego porządku na liczbach wymiernych. Taka sytuacja powtarza się dla każdej z powyżej rozważanych naturalnych teorii.

Mając na uwadze przykłady z powyższego paragrafu możemy zapytać czy jest jakaś istotna różnica natury pojęciowej pomiędzy naturalnymi i sztucznymi teoriami? Czy istnieje jakieś głębsze uzasadnienie tego, że pewne teorie przyciągnęły uwagę logików, matematyków i filozofów zajmujących się podstawami matematyki? Czy istnieje precyzyjne matematyczne kryterium pozwalające odseparować teorie istotne od sztucznie dobranych zbiorów zdań? Te pytania motywują badania w naszym projekcie.

W ramach naszego projektu rozróżnienie na naturalne i sztuczne teorie będzie badane z trzech perspektyw. Po pierwsze, będziemy analizować intuicyjny pogląd, ze naturalne teorie powstają z wyczerpujących opisów ważnych matematycznych struktur, takich jak liczby naturalne czy fragmenty hierarchii zbiorów. W tym celu zamierzamy badać, zarówno pod kątem ich własności matematycznych, jak i filozoficznych, formalne pojęcia *ciasności* (ang. *tightness*), *solidności* (ang. *solidity*) oraz *kategoryczności wewnętrznej* (ang. *internal categoricity*). Zamierzamy sprawdzić czy któreś z tych pojęć dostarcza nam dobrego wyjaśnienia pojęcia *istotności* w przypadku teorii studiowanych w podstawach matematyki. Jeśli nam się powiedzie, zyskamy niesłychanie intuicyjne pojęcie formalne, które, w istotnych przypadkach, będzie pokrywać się z przedteoretycznym pojęciem naturalnej teorii. Po drugie, zamierzamy poddać analizie *filozoficzną* własność systemów formalnych znaną jako *epistemiczna stabilność*. W ogólnym zarysie, teoria jest epistemicznie stabilna, jeśli jest poprawna i zupełna względem rozumowań dopuszczanych przez pewne stanowisko w filozofii matematyki. Zamierzamy wyznaczyć własności systemów formalnych, które są konieczne dla epistemicznej stabilności tych systemów. Trzecim wymiarem naszego projekt jest poszukiwanie abstrakcyjnych i niezależnych od wyboru języka charakteryzacji teorii aksjomatycznych. Podstawową motywacją jest przekonanie, że istotne matematyczne idee można wyrazić równoważnie na wiele różnych sposobów i za pomocą różnych konstrukcji językowych, a wybór języka pełni analogiczną funkcję, co wybór układu współrzędnych przy opisie zjawisk fizycznych. Powszechnie podzielana intuicja mówi, że istotne teorie matematyczne powinny posiadać takie abstrakcyjne charakteryzacje. Niestety, obecnie znane są one tylko w kilku przypadkach. Nasz projekt jest krokiem w kierunku poprawy tej sytuacji.