Streszczenie popularnonaukowe

Algebra liniowa w wymiarze skończenie-orbitowym

Kierownik projektu - Arka Ghosh

Rozważamy skończenie-orbitowe układy równań liniowych. Nieskończony układ równań liniowych, z nieskończenie wieloma zmiennymi, jest *skończenie-orbitowy* jeśli, z dokładnością do permutacji zmiennych, zawiera skończenie wiele różnych równań. Wyjaśnijmy tę koncepcję za pomocą przykładu.

Niech A będzie zbiorem nieskończonym. Rozważmy nieskończony zbiór zmiennych $\left\{ x_{(a,b)} \mid a \neq b \in A \right\}$ indeksowanych parami różnych elementów zbioru A, oraz nieskończony zbiór równań liniowych

$$x_{(a,b)} + x_{(b,a)} = 1, \; a \neq b \in A.$$

Niech $\pi : A \to A$ będzie dowolną permutacją zbioru A. Permutacja π wyznacza permutację zmiennych, która przekształca zmienną $x_{(c,d)}$ na zmienną $x_{(\pi(c),\pi(d))}$, dla dowolnych $c \neq d \in A$. W następnym kroku, permutacja zmiennych wyznacza permutację równań, która przekształca równanie $\big(x_{(c,d)} + x_{(d,c)} = 1\big)$ na równanie $\big(x_{((\pi(c),\pi(d))} + x_{(\pi(d),\pi(c))} = 1\big)$, dla dowolnych $c \neq d \in A$. Zauważmy, że o ile zmienne i równania są permutowane, to zbiór wszystkich zmiennych i zbiór wszystkich równań pozostają niezmienione. Ponadto, z dokładnością do permutacji, dyskutowany układ równań zawiera skończenie wiele równań (dokładniej, jedno równanie) i skończenie wiele zmiennych (dokładniej, jedną zmienną).

Jako wyniki projektu, spodziewamy się ustalić rozstrzygalność rozwiązywania skończenie-orbitowych układów równań liniowych, w wielu wariantach (np przy założeniu, że rozwiązania są nieujemne, albo że są całkowitoliczbowe). Spodziewamy się również opracować solidną teorię przestrzeni wektorowych generowanych przez zbiory skończenie-orbitowe. Wierzymy, że wyniki te przyczynią się do uzyskania postępu w kierunku rozstrzygalności osiągalności dla sieci Petriego z danymi (od wielu lat problem otwarty).