Geometryczne własności ciągów homeomorfizmów Sobolewa oraz homeomorfizmów o ograniczonym wahaniu

ZOFIA GROCHULSKA

Wyobraźmy sobie kulkę plasteliny. Z łatwością można ją *zdeformować*, czyli zmienić jej kształt bez rozrywania plasteliny (czyli w sposób ciągły), tak by znów bez rozrywania dało się wrócić od zniekształconej do oryginalnej kulki. Przekształcenia posiadające te trzy własności – ciągłość, istnienie przekształcenia odwrotnego oraz ciągłość przekształcenia odwrotnego – nazywamy *homeomorfizmami*. W naturalny sposób opisują one deformacje różnych materiałów: rozciągnięcie gumy, zgięcie metalowej blaszki czy zgniecenie plastikowej butelki, które są przedmiotem badań *teorii elastyczności*. Choć studenci matematyki poznają homeomorfizmy jako kluczowe narzędzie topologii, mają one również duże znaczenie w analizie matematycznej, szczególnie jeśli wyposaży się je w pewne dodatkowe własności.

W analizie matematycznej najbardziej pożądaną własnością przekształceń jest istnienie pochodnej, ponieważ wiele zjawisk fizycznych opisuje się za pomocą równań różniczkowych. Niezwykle wygodnym i użytecznym (bo znacznie ogólniejszym niż klasyczna pochodna) pojęciem okazuje się *słaba pochodna*, którą posiadają *homeomorfizmy Sobolewa*. Istotę niniejszego projektu stanowią pytania o geometryczne własności zbieżnych ciągów takich przekształceń. Ustalmy pewien zbiór (na przykład trójwymiarową kulę) i popatrzmy na co przekształcają go coraz dalsze wyrazy ciągu. Pojawia się pytanie: czy, skoro same przekształcenia są do siebie bardzo podobne, zbliżone są do siebie również obrazy tych przekształceń. Moim celem jest pokazanie, że tak właśnie jest, gdy spełnione są pewne dodatkowe warunki. Jednym z nich jest *warunek N Łuzina*, mówiący o tym, że przekształcenie nie może produkować czegoś z niczego, a dokładniej w języku matematyki, że zbiory miary zero są przekształcane na zbiory miary zero. Zdrowy rozsądek podpowiada, że jeśli ten naturalny dla opisu deformacji warunek nie jest spełniony dla granicznego homeomorfizmu, to obrazy kolejnych przekształceń mogą zachowywać się w niespodziewany sposób. Planuję podeprzeć to intuicyjne stwierdzenie przykładami oraz pokazać, że wybrane przeze mnie założenia są optymalne.

Jest wiele powodów, dla których warto lepiej zrozumieć własności homeomorfizmów Sobolewa. Jednym z nich jest rozwój wspomnianej wyżej teorii elastyczności, w której deformacje bada się metodami rachunku wariacyjnego, prowadzącymi do pytania o to co można powiedzieć o granicy ciągów homeomorfizmów. Niestety, graniczne przekształcenie nie musi być homeomorfizmem (choćby z tego powodu, że może okazać się nieciągłe lub nieodwracalne). Z drugiej strony badania ostatnich lat pokazały, że granice homeomorfizmów dziedziczą w pewnym stopniu własności typowe dla przekształceń ciągłych i odwracalnych. Stawiane przeze mnie pytania badawcze również wpisują się w tę problematykę. Planuję ponadto użyć metod związanych z homeomorfizmami Sobolewa oraz ich granicami do zbadania własności homeomorfizmów o gorszych własnościach różniczkowych, takich jak *homeomorfizmy o ograniczonym wahaniu*.

W trakcie badań będę korzystać zarówno z klasycznych metod analizy i topologii jak i bardziej zaawansowanych wyników opublikowanych w ostatnich latach. W ramach projektu zamierzam opublikować jedną lub dwie prace a uzyskane wyniki prezentować na międzynarodowych konferencjach naukowych. Planuję również krótkoterminowe wyjazdy do wiodących instytutów badawczych zajmujących się tematyką homeomorfizmów w Europie (Praga, Neapol) i USA (Syracuse, Pittsburgh).