

Grupy odwzorowań na rozmaitościach: aspekt dynamiczny i probabilistyczny.

Tomasz Szarek

W czasie ostatnich czterech dekad zagadnienia związane z działaniem grupy na rozmaitościach stanowiło przedmiot zainteresowań specjalistów z teorii układów dynamicznych. Ostatnio na znaczeniu zaczęły zyskiwać także badania probabilistyczne w teorii grup. W niniejszym projekcie zajmiemy się zarówno aspektem dynamicznym, jak i probabilistycznym tej teorii.

Jeśli dana jest grupa odwzorowań pewnej rozmaitości w \mathbb{R}^d , naturalnym wydaje się pytanie, kiedy jej działanie jest minimalne (to znaczy, kiedy nie istnieją niezmiennicze domknięte podzbiory właściwe dla odwzorowań tej grupy). Innym zagadnieniem jest kwestia ergodyczności, a więc sytuacja, gdy jedynymi zbiorami niezmienniczymi mogą być zbiory miary Lebesguea zero bądź pełnej miary). Mimo znaczącego postępu dokonanego ostatnimi czasy, nawet najprostszy przypadek 1–wymiarowych rozmaitości (okręgu bądź odcinka), nie został jeszcze całkowicie zbadany.

W badaniach abstrakcyjnej teorii grup ważnym pojęciem jest dystorsja. Mówiąc nieprecyzyjnie, element f grupy G będzie elementem dystorsyjnym, jeżeli długość słowa f^n będzie rosła podliniowo wraz z n . Mówimy w tym przypadku, że długość translacji f zanika. Ostatnio popularnym zagadnieniem wśród specjalistów były badania istnienia elementów dystorsyjnych w pewnych grupach odwzorowań. Osiągnięty bieżący postęp jeśli chodzi o dystorsje w grupach homeomorfizmów okręgu, chcielibyśmy rozważyć problem istnienia elementów dystorsyjnych w innych grupach odwzorowań.

Ostatnimi czasy bardzo popularnymi i ważnymi stają się badania losowych układów dynamicznych. Dzieje się tak za sprawą interesujących i zaskakujących wyników, które udało się udowodnić w ostatnim dziesięcioleciu. W drugiej części projektu naszym celem będzie badanie błędzenia losowego na skończone generowanych grupach odwzorowań, czyli tak zwanych losowych odwzorowań. Istotnie, rozważając grupę transformacji z pewną miarą probabilistyczną, będziemy badać proces stochastyczny odpowiadający losowemu wyborowi elementu z danej grupy. W badaniach działania losowych odwzorowań na rozmaitości, na której są one zdefiniowane, w naturalny sposób pojawia się łańcuch Markowa. Będziemy szukali warunków wystarczających dla istnienia jedynej miary niezmienniczej dla tego łańcucha Markowa. Jedyną miarą będzie oczywiście miarą ergodyczną. W projekcie zajmiemy się losowymi układami homeomorfizmów w \mathbb{R}^d , a także ich własnościami ergodycznymi. Koncentrować się będziemy na przypadku krytycznym, a więc na sytuacji, gdy dryft układu jest zerowy, co zapewne implikować będzie istnienie nieskończonych miar niezmienniczych Radona.

W ostatniej części projektu zamierzamy zbadać twierdzenia graniczne dla łańcuchów Markowa odpowiadających losowym odwzorowaniom. W szczególności interesować nas będzie centralne twierdzenie graniczne, prawo iterowanego logarytmu i wielkie odchylenia.

Od samego początku grupy odwzorowań budziły wielkie zainteresowanie. Kwestie, które zamierzamy badać wydają się mieć fundamentalne znaczenie dla zjawisk związanych z działaniem grup. Choć zagadnienia te wydają się czysto teoretyczne, należy mocno podkreślić ich związek z fizyką statystyczną i informatyką teoretyczną.