

*Popularnonaukowy opis projektu: Matematyka płynów*

PIOTR BOGUSŁAW MUCHA

Mechanika płynów od samego początku była źródłem motywacji do rozwijania teorii matematycznych. Niezastąpiony wpływ można znaleźć w teorii Równaniach Różniczkowych Częstkowych.

Zacznijmy od jednego z najprostszych w sformułowaniu równań: układu Eulera dla przepływów nieściśliwych

$$(1) \quad v_t + v \cdot \nabla v + \nabla p = 0, \quad \operatorname{div} v = 0.$$

Szukamy prędkości i ciśnienia płynu przy warunku nieściśliwości przepływu. Formalnie układ ten jest hiperboliczny, ale wewnętrzna (nieznana) siła będąca fizycznym ciśnieniem płynu jest określona przez następującą relację

$$(2) \quad -\Delta p = \operatorname{div} \operatorname{div} (v \otimes v).$$

Specjalna struktura systemu prowadzi do globalnej rozwiązywalności w przypadku dwuwymiarowym, dla dowolnej dużej, ale gładkiej konfiguracji początkowej. Dla słabych rozwiązań o małej regularności obraz jest inny. Obecnie teoria rozwinięta dzięki całkowaniu wypukłemu dostarcza wielu niejednoznacznych rozwiązań Równań Eulera. Wspomnijmy, że jednoznaczność wiąże się z regularnością rozwiązań. Z tego powodu obecnie główny nurt jest ukierunkowany na poszukiwanie zjawisk wybuchów rozwiązań, głównie ściśliwych wersji systemów. Znajdujemy tu bliski związek z otwartym Problemem Milenijnym dotyczącym regularności rozwiązań równań Naviera-Stokesa. Chociaż rozważane systemy są dobrze ugruntowanymi klasycznymi modelami, powyższe metody stanowią awangardę obecnej analizy.

Obecnie nauka znajduje również inne pochodzenie systemów typu (1), mamy tu na myśli modele wynikające ze opisów zachowań kolektywnych opartych na interakcji jednostek/częstek. W najprostszej wersji rządzą nimi układy Równań Różniczkowych Zwyczajnych, a następnie znajdując ich granice hydrodynamiczne otrzymujemy dużą klasę równań typu płynowego. Takie podejście jest konieczne przy opisie dużych zbiorowości. Równania te wiążą się z kontrolą ruchu samochodów na autostradach, dynamiką ruchu ławic ryb, ale także opinii w społeczeństwie. Ogólnie we wszystkich zjawiskach, w których cząstki/osobniki podlegają interakcjom typu agregacji-repulsji. Warto podkreślić, że modele hydrodynamiczne pozwalają na wyjaśnienie zjawisk takich jak agregacja, segmentacja czy uzgadnianie prędkości w dużych grupach.

Projekt ma na celu analizę problemów matematycznych związanych z układami o strukturze równań płynów w języku Równań Różniczkowych Częstkowych. Zwracamy uwagę na pytania związane z istnieniem słabych rozwiązań, czasem odpowiednim ich pojęciem, z drugiej strony chcemy badać kwestie jednoznaczności oraz stabilności rozwiązań. Na koniec chcemy opracować nowe techniki oparte na teorii Równań Różniczkowych Częstkowych na grafach metrycznych, aby stworzyć nowe przybliżenie systemów klasycznych. Wreszcie, co nie mniej ważne, dążymy do rewizji obecnych technik opartych na teorii maksymalnej regularności typu parabolicznego w zakresie teorii interpolacji i teorii przestrzeni funkcyjnych typu Besova i Lorentza.