

Wybrane aspekty matematycznego modelowania płynów wieloskładnikowych

Niniejszy projekt dotyczy matematycznych modeli płynów, składających się z więcej niż jednego składnika. Jest to poddziedzina mechaniki płynów, dynamicznie rozwijana w ostatnich latach zarówno pod względem samego modelowania, jak i matematycznej analizy. Przedmiot naszych badań posiada także wiele zastosowań w naukach przyrodniczych. Przede wszystkim, w przyrodzie mamy do czynienia z różnego rodzaju mieszaninami. Poza tym, podobne mechanizmy służą do opisu zjawisk w innych dziedzinach. Przykładowo możemy za ich pomocą modelować wzajemne zachowania różnych gatunków zwierząt. Z drugiej strony, z matematycznego punktu widzenia kwestia modelowania i analizy takich układów jest bardzo złożona. Ze względu na interakcje pomiędzy składnikami, występują tu różne zjawiska nieobecne w klasycznych modelach mechaniki płynów, takie jak dyfuzja lub reakcje chemiczne pomiędzy poszczególnymi substancjami. Innym ciekawym zagadnieniem jest także uwzględnienie stopnia wymieszania składników.

Głównym matematycznym narzędziem, służącym do opisu zachowania płynu, są równania różniczkowe cząstkowe. Na poziomie matematycznego opisu, wyżej wymienione interakcje między składnikami odpowiadają wówczas za modyfikację klasycznych równań, modelujących jednoskładnikowe płyny. Powyższe zjawiska zmieniają również charakter opisywanych układów, przez co standardowe metody analizy zawodzą. Z tego powodu potrzebne jest opracowanie nowych metod, które pozwolą na ich badanie.

Nasze badania skupiają się na własnościach tzw. słabych rozwiązań. Przez słabe rozwiązanie równania różniczkowego rozumiemy funkcję, która spełnia pewne istotne własności klasycznego rozwiązania, ale ma niższą regularność. Przykładowo, mimo że równanie zależy od pochodnych rozwiązania, słabe rozwiązanie nie musi być różniczkowalne, a czasem nawet i ciągłe. Możemy dzięki temu traktować jako rozwiązanie gęstość płynu, która zmienia się skokowo – w naszym kontekście obrazuje to przykładowo sytuację, w których różne składniki znajdują się na rozłącznych zbiorach. W klasycznych metodach równań różniczkowych cząstkowych wykazanie istnienia słabych rozwiązań jest również często istotnym krokiem do wykazania tych bardziej regularnych – najpierw pokazujemy, że rozwiązania istnieją w słabym sensie, a później dowodzimy, że w rzeczywistości mają pożądaną przez nas regularność.

Celem naszego projektu jest udzielenie kompleksowej odpowiedzi na zagadnienia związane z istnieniem słabych rozwiązań równań modelujących wymienione zjawiska, a także zbadanie dalszych ich własności, takich jak jednoznaczność oraz regularność rozwiązań. W efekcie nasze wyniki rozszerzą aktualny stan wiedzy w tej dziedzinie. Liczymy także na to, że opracowane metody pozwolą na analizę równań różniczkowych cząstkowych występujących w innych kontekstach.