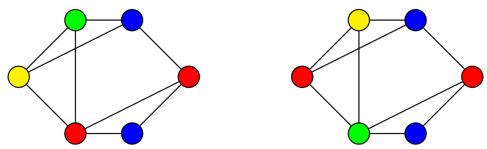
Problem homomorfizmu grafów w strukturalnie ograniczonych klasach

Marta Piecyk

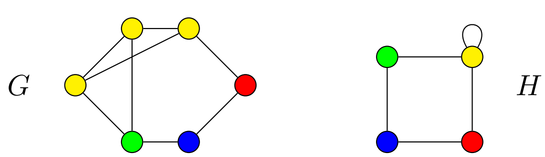
Jednym z najbardziej znanych problemów w teorii grafów jest problem k-kolorowania. Mamy dany graf G i chcemy pokolorować jego wierzchołki używając co najwyżej k kolorów tak, aby sąsiadujące wierzchołki dostały różne kolory (patrz Rysunek 1).



Rysunek 1: Niepoprawne kolorowanie grafu (po lewej) oraz poprawne (po prawej).

Chcąc rozwiązać problem k-kolorowania, możemy spróbować sprawdzić wszystkie możliwe kolorowania. Jednak takich możliwości jest wykładniczo dużo, dlatego taki algorytm jest mało efektywny i dla bardzo dużych grafów nawet na nowoczesnych komputerach takie obliczenia mogłyby zająć wiele lat. Dlatego interesują nas algorytmy, których czas działania nie będzie zbyt długi, np. wielomianowy względem rozmiaru danych wejściowych. W przypadku k-kolorowania wiadomo, że takie algorytmy istnieją dla $k = 1$ i $k = 2$. Inaczej jest już dla $k \geqslant 3$ – nie znamy wielomianowego algorytmu i, co więcej, są silne przesłanki, że taki algorytm nie istnieje (słynna hipoteza P$\neq$NP). Można jednak próbować rozwiązać problem k-kolorowania przy pewnych dodatkowych własnościach wejściowego grafu i uzyskać szybki algorytm.

Uogólnieniem k-kolorowania jest problem homomorfizmu grafów, nazywany też H-kolorowaniem grafów. W k-kolorowaniu dozwolone pary kolorów dla dwóch sąsiadująch wierzchołków to dokładnie wszystkie pary różnych kolorów, natomiast w problemie homomorfizmu graf H opisuje nam, które pary kolorów są dozwolone, a które nie. Dokładniej, mamy ustalony graf H (zazwyczaj traktujemy go jako mały), a na wejściu mamy dany graf G (potencjalnie duży) i pytamy, czy możemy pokolorować wierzchołki grafu G w taki sposób, aby sąsiadujące wierzchołki w G otrzymały sąsiadujące wierzchołki w grafie H (patrz Rysunek 2).



Rysunek 2: Graf G (po lewej) pokolorowany poprawnie wierzchołkami grafu H (po prawej).

W projekcie będziemy badać złożoność obliczeniową problemu homomorfizmu, tj. będziemy chcieli sprawdzić, w jakim czasie możemy go rozwiązać w zależności od założeń o wejściowym grafie.