Streszczenie popularnonaukowe

W tym projekcie zamierzam badać obiekty matematyczne nazywane *grupami*. Pojęcie grupy jest wszechobecne w matematyce. Pozwala ono opisywać rożne idee w ustrykturyzowany sposób. Mówiąc luźnym językiem, grupy można rozumieć jako uogólnienia geometrycznych symetrii, takich jak symetria osiowa czy środkowa. Grupy znajdują liczne zastosowanie w prawie wszystkich dziedzinach matematyki, od algebry do równań różniczkowych. Obecność grup jest szeroka także w innych dziedzinach. Przykładowo, opisują one modele w fizyce cząstek oraz chemii molekularnej.

Planuję badać grupy przy użyciu ich *kohomologii*. Studiowanie grup przy pomocy kohomologii jest motywowane próbą ich *reprezentacji* w przystępny sposób. Takie reprezentacje mogą być znalezione korzystając z pojęcia *modułu grupowego*. Kohomologia grup dostarcza wgląd w strukturę grup przy pomocy modułów grupowych. Dokładniej, pozwala ona opisać *niezmienniki* grupowe, czyli narzędzia do testowania specyficznych własności grup. Zamierzam skupić się na punkcie widzenia pod kątem *geometrycznej teorii grup*, mianowicie na pewnych własnościach *sztywności*, do których można zaliczyć między innymi *własność (T) Kazhdana*, która, z grubsza mówiąc, zapewnia, że symetrie grup z tą własnością posiadają punkty stałe. Ściśle mówiąc, głównym tematem mojego projektu jest badanie zjawisk *znikania* oraz *redukowalności* kohomologii grup ze *współczynnikami unitarnymi*. Te zjawiska uogólniają własność (T) i mogą być zastosowane do konstrukcji nowych przykładów *ekspanderów*, które z kolei znajdują wiele zastosowań zarówno w matematyce teoretycznej, jak i w informatyce.

Zamierzam podejść do badania znikania i redukowalności kohomologii grup przy pomocy specyficznego algebraicznego warunku dostatecznego, udowodnionego niedawno przez Badera i Nowaka. Ten warunek wymaga badania pewnego *operatora Laplace'a* w ujęciu *pierścieni grupowych*. Takie badanie może być efektywnie przeprowadzone przy pomocy programowania *nieujemnie określonego (semi-definite)*, które jest uogólnieniem metody *sympleks* z optymalizacji wypukłej. Wymaga to przeprowadzania *ścisłych* dowodów matematycznych wspomaganych komputerowo. Chciałbym pracować nad grupami $\mathrm{Aut}(F_n)$, o ktorych można w luźny sposób myśleć jako o grupach *symetrii wszystkich symetrii*. Zostało ostatnio dowiedzione, że grupy te posiadają własność (T), co tłumaczy efektywność tzw. *algorytmu wymiany iloczynu (Product Replacement Algorithm)* zaproponowanego przez Charlesa Leedham-Grahama i Leonarda Soichera pod koniec XX wieku oraz pozwalającego generować losowe elementy w grupach. Dowód własności (T) dla $\mathrm{Aut}(F_n)$ wymagał pokazania istnienia dodatniej *stałej Kazhdana*. Pytanie o redukowalność kohomologii $\mathrm{Aut}(F_n)$ pozostaje jednakże ciągle otwarte. Spodziewam się odpowiedzieć na to pytanie i, w miarę możliwości, podać lepsze oszacowania na stałe Kzhdana dla $Aut(F_n)$.

Planuję również scharakteryzować redukowalność kohomologii grup o współczynnikach unitarnych używając warunku Badera i Nowaka – przypuszczam, że ten warunek będzie także warunkiem koniecznym. Byłoby to dokładne uogólnienie rezultatu Ozawy dotyczącego redukowalności pierwszych grup kohomologii o współczynnikach unitarnych (co okazuje się równoważne własności (T) Kazhdana). Pozwoliłoby to przetłumaczyć redukowalność kohomologii na skończenie wymiarowe rozważania nad pierścieniami grupowymi.