Nr rejestracyjny: 2022/44/C/ST1/00033; Kierownik projektu: dr Jędrzej Garnek

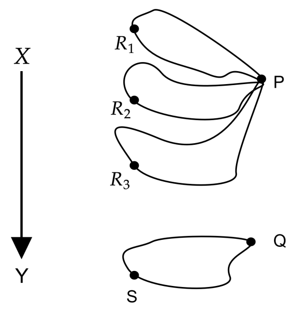
Kohomologia de Rhama nakryć p-grupowych

STRESZCZENIE POPULARNONAUKOWE

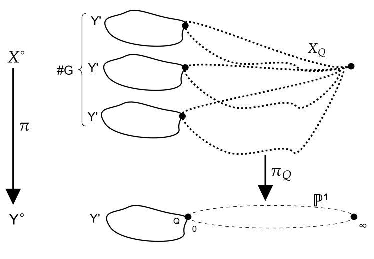
Jędrzej Garnek

Topologia algebraiczna jest dziedziną matematyki, która bada rozmaitości, tzn. przestrzenie które są prawie płaskie w małej skali. Przykładowo, Ziemia wydaje się być płaska z naszej perspektywy, mimo że jest okrągła. *Geometria algebraiczna* zajmuje się z kolei *rozmaitościami algebraicznymi*, tzn. zbiorami określonymi przez równania wielomianowe. Współczynniki tych równań mogą być np. liczbami rzeczywistymi – w tym przypadku uzyskujemy pewną rozmaitość topologiczną. Może się jednak zdarzyć, że współczynniki te należą np. do $\mathbb{F}_p$ (gdzie p jest ustaloną liczbą pierwszą). $\mathbb{F}_p$ jest zbiorem reszt z dzielenia przez p wraz z operacjami dodawania modulo p oraz mnożenia modulo p. Rozmaitość algebraiczna nad $\mathbb{F}_p$ nie jest rozmaitością topologiczną, jednak wciąż można ją badać za pomocą różnych narzędzi topologicznych. *Kohomologia* stanowi w topologii i geometrii klasyczny niezmiennik rozmaitości. W topologii kohomologia mierzy „liczbę dziur" rozmaitości. Istnieje kilka realizacji tego pomysłu. *Kohomologia de Rhama* mierzy na ile podstawowe twierdzenie rachunku całkowego nie zachodzi na ogólnych rozmaitościach. Inną teorią kohomologii jest *kohomologia Hodge'a*. Obie wymienione teorie kohomologi dają w topologii ten sam wynik. Okazuje się jednak, że dla rozmaitości algebraicznych nad ciałami skończonymi, te dwie teorie kohomologii zachowują się w różny sposób.

W naszych badaniach zajmujemy się krzywymi (rozmaitościami wymiaru 1) wraz z pewnym ustalonym zbiorem symetrii krzywej. Wybór takiego zbioru symetrii krzywej jest równoważny z zadaniem "ładnego" odwzorowania (zwanego *nakryciem krzywych*) z X do innej krzywej Y. W nakryciu nad prawie każdym punktem krzywej Y znajduje się ta sama liczba punktów krzywej X. Pozostałe punkty nazywamy *punktami rozgałęzienia* (patrz Rysunek 1). W tym kontekście będziemy próbowali opisać strukturę kohomologii krzywej nad $\mathbb{F}_p$, uwzględniając działanie symetrii. W kontekście topologicznym jest to klasyczny i dobrze zbadany temat. Dla rozmaitości algebraicznych nad $\mathbb{F}_p$ zachowanie kohomologii Hodge'a i de Rhama wciąż pozostaje jednak tajemnicą. Nasze poprzednie wyniki pokazują, że jeżeli rozmaitość ma przynajmniej jeden "dostatecznie zły" punkt, to kohomologie Hodge'a i de Rhama różnią się od siebie. Jest to na swój sposób zaskakujący wynik, bo łączy on obiekty globalne (teorie kohomologii) z lokalnym zachowaniem rozmaitości. Celem tego projektu jest wyjaśnienie tego zjawiska.



Rysunek 1: Nakrycie krzywych. Q jest jedynym punktem rozgałęzienia, jako że tylko P leży nad Q. Nad dowolnym innym punktem Y znajdują się trzy punkty X – np. nad S mamy punkty R_1, R_2, R_3.



Rysunek 2: Zdegenerowane nakrycie przybliżające nakrycie z Rysunku 1.

Wspomniane wyniki sugerują, że kohomologia de Rhama rozkłada się na sumę pewnej części globalnej i części lokalnych. Część globalna powinna zależeć tylko od "topologii" nakrycia (np. od liczby punktów rozgałęzienia), zaś części lokalne powinny zależeć tylko od małego otoczenia punktów stałych symetrii. Ponadto, globalna część kohomologii Hodge'a oraz kohomologii de Rhama powinny być takie same. Spodziewamy się również, że części lokalne można opisać korzystając z nakryć Harbatera–Katza–Gabbera, tzn. nakryć prostej rozgałęzionych tylko w jednym punkcie. Wynika to z faktu, że każde nakrycie powinno dać się zdeformować w sposób ciągły do trywialnego nakrycia sklejonego z pewną liczbą nakryć Harbatera–Katza–Gabbera, odpowiadających punktom rozgałęzienia (patrz Rysunek 2).

W drugiej części projektu chcemy zbadać różne uogólnienia tej hipotezy. W szczególności, chcielibyśmy stwierdzić, czy podobny rozkład zachodzi dla kohomologii rozmaitości abelowych. *Rozmaitości abelowe* to rozmaitości algebraiczne, których punkty można dodawać. Rozmaitości abelowe nad $\mathbb{F}_p$ znalazły zastosowania między innymi w kryptografii i przy rozkładzie dużych liczb na czynniki pierwsze.