Techniki Aproksymacyjne dla równań różniczkowych cząstkowych i rachunku wariacyjnego

Cele badawcze obecnego projektu są dwojakie - badania w obszarze rachunku wariacyjnego oraz w obszarze równań różniczkowych cząstkowych. Na pierwszy rzut oka może się to wydawać przytłaczającym zadaniem dla osoby rozpoczynającej karierę naukową, jednak te dwie dziedziny są ściśle powiązane poprzez użycie tych samych narzędzi aproksymacji. Istotą projektu jest opracowanie technik aproksymacji w różnych, często niestandardowych, przestrzeniach funkcyjnych. Podstawowymi przestrzeniami, które mogą służyć jako przykład do zrozumienia kluczowej idei, są dobrze znane przestrzenie Sobolewa. Standardowym zadaniem studenta studiów licencjackich jest pokazanie, że funkcje gładkie o zwartym nośniku są gęste w przestrzeniach Sobolewa. Korzyści i zastosowanie tej wiedzy są znaczące. Wszystkie obliczenia, których nie można było wykonać w przypadku słabych pochodnych, łatwo możemy wykonać dla funkcji gładkich. Wtedy etap przejścia do granicy jest ostatnim, ale nie mniej ważnym, uzupełnieniem dowodu interesującego nas faktu. Celowo podkreśliliśmy, że jest to nie najmniejszy krok, ponieważ w tym momencie pojawiają się istotne trudności. Mogą one wynikać z różnych czynników, m.in.: złożoności przestrzeni funkcyjnej, niskiej regularności wyrażeń występujących w rozważanym równaniu czy określonej postaci funkcjonału minimalizowanego. Kluczowym i pierwszym krokiem tego projektu jest pokazanie, że elementy odpowiedniej, niestandardowej przestrzeni funkcji mogą być aproksymowane lepszymi obiektami (np. funkcje gładkie o zwartym nośniku lub ograniczone). Drugim etapem badań, choć naprawdę dalekim od trywialnego, jest zastosowanie tego narzędzia do dwóch problemów. Pierwszy dotyczy kwestii pojawiania się zjawiska Lavrentiev-a w badaniach istnienia i regularności minimów funkcjonałów. Jest to problem, który w ostatnim czasie wzbudza duże zainteresowanie. Drugim interesującym problemem są równania różniczkowe cząstkowe: paraboliczne lub eliptyczne. Techniką, która prawie zawsze wydaje się być lekarstwem na oszacowania a priori lub dowód jednoznaczności, jest testowanie równania za pomocą samego rozwiązania. Nie zawsze jest to jednak możliwe, właśnie ze względu na nieodpowiednią regularność rozwiązania i wtedy kluczowe są uzyskane wcześniej wyniki aproksymacji. Rozważane przestrzenie funkcyjne są powiązane albo z formą funkcjonału, albo z operatorem różniczkowym w równaniach różniczkowych cząstkowych.