

Problemy sprawiedliwego podziału oraz różnorodność rozwiązań w złożoności parametryzowanej

Tomáš Masařík

W sferze algorytmów i teorii złożoności wiele podstawowych pytań pozostaje nierozwiązanych. Przykładem jest tutaj klasyczny problem równości klas P i NP, który w uproszczeniu pyta o możliwość rozwiązania w czasie wielomianowym (co uznajemy za wydajne) pewnej klasy trudnych problemów. Choć problem $P \neq NP$ formalnie wciąż pozostaje nierozwiązany, powszechnie uznaje się, że te problemy są istotnie trudne i nie da się ich rozwiązywać wydajnie: znamy tylko algorytmy o wykładniczej złożoności. Nie jest to jednak przeszkoda zupełnie nie do przeskoczenia: istnieje wiele podejść pozwalających atakować takie problemy i koniec końców rozwiązywać je szybko. W projekcie będziemy stosować podejście złożoności parametryzowanej, polegające na rozważaniu, dla danej instancji problemu, pewnej pomocniczej miary trudności, zwanej parametrem. Celem jest opracowanie algorytmu działającego wydajnie gdy parametr jest niski. Można wyróżnić dwie naturalne klasy takich algorytmów. W przypadku algorytmów FPT, czas działania algorytmu może dowolnie zależeć od parametru, ale zależność złożoności od wielkości instancji powinna być ograniczona przez ustalony wielomian. W algorytmach XP pozwalamy dodatkowo, by wykładnik tego wielomianu również zależał od parametru. Tabela 1 poniżej intuicyjnie pokazuje, dlaczego te dwie klasy złożoności bardzo różnią się w praktyce.

k/n	50 (1 dzień)	100 (3.2T lat)	500 (10^{133} lat)	1000 (10^{283} lat)
5	133 ns 26 ms	266 ns 0.8 s	1.3 μ s 43 minut	2.7 μ s 1 dzień
10	4 μ s 94 dni	8 μ s 264 lata	40 μ s 2.5G lat	80 μ s 2.6T lat
25	0.1 s 10^{24} lat	0.2 s 10^{32} lat	1 s 10^{49} lat	2 s 10^{57} lat

Tabela 1: Porównanie czasu działania naiwnego algorytmu wykładniczego (złożoność 2^n), algorytmu XP (złożoności n^k) oraz algorytmu FPT (złożoność 2^{kn}) na standardowym komputerze (4 rdzenie, taktowanie 3GHz). Czas działania naiwnego algorytmu jest podany w pierwszym rzędzie w nawiasach. Czasy działania algorytmów FPT | XP są w komórkach tabeli.

W projekcie będziemy badać dość nietradycyjne problemy, w których celem nie jest jedynie znalezienie pojedynczego optymalnego rozwiązania, jak zazwyczaj się przyjmuje. W pierwszej grupie rozważanych zagadnień chcielibyśmy skupić się na rozwiązaniach, które niejako są „sprawiedliwe” (*ang.* fair), przykładowo dzielą zasoby równo pomiędzy zaangażowane strony. Druga klasa obejmuje problemy, w których celem jest znalezienie małego, ale możliwie różnorodnego zbioru stosunkowo dobrych rozwiązań. Motywacja takiego postawienia celu badawczego jest naturalna. W przypadku problemów sprawiedliwego podziału, celem nie jest znalezienie rozwiązania, które jedynie „liczbowo” jest dobre, ale przede wszystkim takiego, które nie dyskryminuje żadnej strony. Z kolei znajdowanie różnorodnych rozwiązań wpisuje się w zastosowania, w których użytkownik chciałby lepiej zrozumieć przestrzeń rozwiązań w poszukiwaniu początkowo nieznanymi schematów czy własności. Przykładem może tu być automatyczne projektowanie budynku, gdzie użytkownika interesuje raczej obejrzenie wąskiego wachlarza znacząco różniących się opcji, niż generowanie listy bardzo podobnych rozwiązań.

Metody algorytmiki parametryzowanej dopiero niedawno zaczęły być używane w kontekście rozważanych zagadnień. Naszym celem będzie możliwie precyzyjna klasyfikacja złożoności parametryzowanej badanych problemów, co równocześnie pozwoli na lepsze zrozumienie ich kombinatoryki. Oprócz bezpośredniego badania sprawiedliwych wariantów klasycznych problemów przy ich naturalnych parametryzacjach, będziemy je również rozważać pod kątem różnych parametryzacji strukturalnych, wykorzystując meta-twierdzenia związane z wyrażalnością w określonych formalizmach logicznych. W przypadku napotkania problemów dowodliwie trudnych, będziemy starać się opracowywać parametryzowane algorytmy aproksymacyjne, które zamiast znajdować optymalne rozwiązanie, jedynie obliczają pewne rozwiązanie o gwarantowanej jakości. Od strony koncepcyjnej, będziemy proponować różne alternatywne definicje miar sprawiedliwości rozwiązań i różnorodności zbiorów rozwiązań, oraz badać wpływ przyjmowania tych definicji na algorytmiczną złożoność rozwiązywania problemów z nimi związanych.