

1. Popularnonaukowe streszczenie projektu

Program projektu wpisuje się w nurt badań podstawowych i ma na celu rozwój wiedzy matematycznej na temat metod przestrzeni Hilberta w dwóch głównych aspektach. Są to metody algebraiczne, w tym wybrane narzędzia analizy harmonicznej na półgrupach, oraz metody pochodzące z szeroko rozumianej teorii miary i całki obejmującej całkowanie funkcji względem miar operatorowych. Program naukowy projektu koncentruje się wokół trzech zagadnień badawczych w których przenikają się wyżej wspomniane metody. Wszystkie te zagadnienia stanowią problemy, które do tej pory są nierozstrzygnięte.

Pierwsze zagadnienie związane jest z odpowiedzią na pytanie kiedy zadana miara której wartościami są dodatnie operatory na przestrzeni Hilberta jest spektralna, czyli kiedy jej wartościami są projekcje ortogonalne. Spodziewamy się uzyskać odpowiedzi sformułowanej w terminach skończonej (możliwie najmniejszej) liczby momentów operatorowych. Język momentów doskonale wpisuje się we współczesne podejście do drugiej kwantyzacji mechaniki kwantowej zaproponowanej między innymi przez Kiukasa, Lahtiego oraz Ylлина w 2006 roku, z jednej strony, a z drugiej pozwala na rozwiązywanie problemów z czystej teorii operatorów takich jak np., problem Curto, Lee and Yoona dotyczący subnormalnych n -tych pierwiastków operatorów kwazinormalnych. Problem jest wysoce nietrywialny jako, że ma ścisły związek z nierozstrzygniętą do tej pory hipotezą Arvesona o hipersztwności z nieprzemiennej teorii Choqueta oraz z twierdzeniami typu Korovkina.

Kolejne zagadnienie nawiązuje do operatora przesunięcia czasowego dla zaburzonego ruchu Browna, studiowanego przez Aglera i Stankusa w latach 90-tych. Takie operatory, a dokładniej ich całki ortogonalne, mają blokową reprezentację macierzową 2×2 z prawym dolnym wyrazem unitarnym. Jeśli wyraz unitarny zastąpimy ogólniejszym operatorem, to w teorii Aglera i Stankusa pojawiają się zupełnie nowe i nieoczekiwane pytania. Jednym z naturalnych pytań jest to czy operator typu Browna z prawym dolnym wyrazem będącym operatorem subnormalnym posiada rozszerzenie po współrzędnych do operatora typu Browna z prawym dolnym wyrazem będącym operatorem normalnym. Problematyka ta nawiązuje do współczesnych trendów które pojawiły się w teorii podnoszenia operatorów do operatorów ogólniejszych niż izometrie.

Ostatnie z trzech zagadnień badawczych dotyczy operatorów warunkowo dodatnio określonych. Klasa tych operatorów wyewoluowała przy okazji poszukiwań efektywnych kryteriów na subnormalność operatorów ograniczonych, w szczególności operatorów kompozycji na przestrzeniach L^2 z symbolami afinicznymi. Badania w tym zakresie trwały wiele dekad i owocowały coraz bardziej efektywnymi kryteriami proponowanymi kolejno przez Halmosa, Brama, Embry, Lamberta i Aglera. Jako kulminację uzyskano kryterium odwołujące się do pojęcia dodatniej określoności w sensie półgrupowym. Jednym z zagadnień które zamierzamy badać w niniejszym projekcie jest problem podobieństwa warunkowo dodatnio określonego operatora do operatora subnormalnego. Problem ten jest o tyle trudny, że jak wiadomo operatory warunkowo dodatnio określone o promieniu spektralnym mniejszym od jeden są automatycznie subnormalne z jednej strony, a z drugiej klasa operatorów warunkowo dodatnio określonych zawiera klasę 3-izometrii która jest bardzo odległa od klasy operatorów subnormalnych (m -izometrie zostały wprowadzone przez Aglera; dla takich operatorów promień spektralny jest zawsze równy 1).