

Przestrzenie funkcyjne wygładzania lokalnego **Jan Rozendaal**

Jeśli pokażę Ci zdjęcie jeziora, na którym widać każdą kroplę wody i jeśli dam Ci wszystkie równania matematyczne opisujące zachowanie fal na wodzie, czy odpowiesz mi, jak dokładnie będzie wyglądało jezioro minutę po zrobieniu tego zdjęcia?

Matematyka mówi nam, że co do zasady odpowiedź brzmi tak. Jednak w praktyce, zarówno przeprowadzenie takich wyliczeń jak i zrobienie zdjęcia z takim poziomem szczegółowości nie byłoby możliwe. Co więcej, w większości przypadków nie jest nam potrzebne dokładne przewidzenie, gdzie znajdzie się każda pojedyncza kropla wody. W rzeczywistości ruch wody w jeziorze jest tylko jednym z podstawowych przykładów ważnego typu zjawisk, który obejmuje również fale dźwiękowe, radiowe, elektromagnetyczne, a nawet grawitacyjne.

Tak więc, zamiast próbować dokonywać doskonałych przewidywań opartych na doskonałej wiedzy o jednym konkretnym zjawisku, matematycy próbują tworzyć nieco bardziej ograniczone przewidywania na podstawie nieco mniej szczegółowych informacji o danym typie zjawisk. Najprostszym tego przykładem jest zasada zachowania energii z fizyki: jeśli powiem Ci, ile energii jest zawarte w określonym układzie cząsteczek, który jest odcięty od reszty świata, to będziesz wiedział, ile jej jest po jednej minucie, nawet jeśli cząsteczki w tym czasie zmieniły swoje miejsce.

Matematycy interesują się także innymi właściwościami układów fizycznych. Na przykład, możemy być zainteresowani wysokością najwyższej fali w naszym jeziorze, jednak ta wartość zazwyczaj nie zostaje zachowana. W związku z tym zamiast tego matematycy po prostu próbują oszacować taką wielkość. W takim wypadku ważne jest więc, aby woda w jeziorze nie była zbyt chaotyczna i żeby nie było fal silnie uderzających o siebie. Jeśli woda na zdjęciu jest spokojna i gładka, to okazuje się, że możliwe jest uzyskanie dobrych szacunków danej właściwości wody. W rzeczywistości, w 1991 roku matematycy byli w stanie dokładnie określić, jak gładkie musi być jezioro, aby oszacować określoną właściwość dokładnie po minucie. I byli w stanie zrobić to samo dla znacznie bardziej ogólnych typów zjawisk, w których występują fale.

Jednak po rozwiązaniu tego problemu, w 1993 roku, poczyniono kolejną obserwację. Załóżmy, że zamiast chcieć oszacować daną właściwość dokładnie po minucie, chcesz tylko oszacować średnią wielkość w ciągu tej minuty. Zaobserwowano, że wtedy jezioro nie musi być tak gładkie na zdjęciu, jak wtedy, gdy chcesz uzyskać szacunki na dany czas. Ta zasada nazywa się wygładzaniem lokalnym. Niestety od 1993 roku pytanie, jak bardzo gładka musi być woda, jeśli chcemy oszacować średnią danej właściwości, pozostaje otwarte. I to właśnie otwarte pytanie wiąże się z wieloma innymi, pozornie zupełnie niepowiązanymi, a jednak bardzo ważnymi, otwartymi problemami matematyki.

Projekt będzie wykorzystywał nowe podejście do wygładzania miejscowego poprzez śledzenie informacji, znajdujących się na zdjęciu, które są najczęściej pomijane. W jednej z ostatnich prac głównego badacza zostało wykazane, że śledząc kierunki, w których poruszają się fale, nie ma konieczności osiągnięcia aż takiej gładkości jak wcześniej, aby dokonywać dobrych szacunków. Projekt rozwinięto to podejście na kilka sposobów.

Przykładowo zostanie określone, do jakich właściwości wody w jeziorze można zastosować to nowe podejście. Kiedy to nowe podejście poprawi istniejące szacunki?

Z drugiej strony założmy, że zastąpimy samo jezioro czymś bardziej skomplikowanym, na przykład wodą płynącą w rwącej rzece w górach. Czy w dalszym ciągu będziemy mogli wykorzystać informacje o kierunkach, w których poruszają się fale, aby uzyskiwać dobre szacunki?

W projekcie przedstawione zostaną również nowe sposoby wykorzystywania informacji o kierunkach, w jakich poruszają się fale. Czy będą one stanowiły podstawę jeszcze skuteczniejszych sposobów przewidywania?

Oczekuje się, że projekt odpowie na te i inne pytania, a tym samym znacznie poprawi obecne zrozumienie zasady wygładzania lokalnego.