

Problemy typu Turána w teorii grafów

Wiele obiektów i zjawisk spotykanych w życiu można modelować używając grafu, czyli zbioru punktów (zwanymi wierzchołkami), spośród których pewne połączone są krawędzią. Grafem możemy modelować na przykład sieć połączeń drogowych pomiędzy miastami lub sieć Facebook, uznając osoby za wierzchołki i ustanawiając krawędź między tymi osobami, które się znają. Na otrzymanym grafie można używać metod matematycznych pozwalających na łatwiejszą analizę własności wyjściowej sieci oraz efektywniejsze tworzenie algorytmów. Dzięki temu można uzyskać konkretne potrzebne informacje, na przykład znaleźć najkrótszą trasę czy zbadać tempo rozprzestrzeniania się wiadomości w sieci społecznościowej. Prostota i ogólność grafów, a także ich szerokie zastosowania praktyczne, wymuszają silną potrzebę opracowania nowych technik rozwiązywania problemów teorii grafów i sprawiły, że dziedzina ta stała się ważnym obszarem badań w matematyce i informatyce.

Jednym z najbardziej znaczących wyników w teorii grafów jest twierdzenie Turána z 1941 r. wyznaczające maksymalną możliwą liczbę krawędzi w grafie o ustalonej liczbie wierzchołków, który nie zawiera grafu pełnego zadanej wielkości. Niniejszy projekt dotyczy różnych uogólnień tego twierdzenia, w których pyta się nie o liczbę krawędzi, ale o liczbę innych podgrafów, podgrafów indukowanych lub minimalny stopień (najmniejszą liczbę krawędzi incydentnych do wierzchołka), a także podobnych pytań stawianych dla grafów zorientowanych (grafów z orientacją na każdej krawędzi) oraz grafów z kolorami na krawędziach. Takie uogólnienia są motywowane ostatnimi intensywnymi osiągnięciami i ważnymi otwartymi problemami w teorii grafów. Celem projektu jest odpowiedź na niektóre istotne hipotezy, zbadanie zachowania rozważanego maksimum w różnych nieznanach przypadkach i opracowanie nowych technik radzenia sobie z takimi problemami typu Turána.

Wśród rozważanych uogólnień jest maksymalizacja liczby kopii danego grafu zamiast liczby krawędzi. W tym przypadku nie mamy ogólnych twierdzeń i rozwiązanie problemu nawet dla małych konkretnych grafów jest trudne i znaczące. Przykładowo, hipoteza Erdősa o maksymalnej liczbie pięciokątów w grafach bez trójkątów została rozwiązana przez kierownika projektu po prawie 30 latach, podczas gdy problem maksymalnej liczby trójkątów w grafach bez dwóch trójkątów o wspólnej krawędzi jest równoważny z otwartym problemem wyznaczenia ścisłych ograniczeń w tak zwanym lemacie o usuwaniu trójkątów, który ma ważne implikacje poza teorią grafów. W ramach projektu planowane jest między innymi udowodnienie ogólnej hipotezy dającej asymptotyczną odpowiedź w znaczącej liczbie przypadków oraz znalezienie maksimum dla niektórych interesujących klas grafów jak cykli, uogólniając wspomnianą hipotezę Erdősa, a także dla cykli skierowanych w grafach zorientowanych.

Planowana metodologia zawiera w szczególności nowatorskie metody analityczne oparte na granicach grafowych i wspomaganie komputerowym. Takie metody zostały w ostatnich latach bardzo rozwinięte i poczyniły postępy nie tylko w teorii grafów, ale także w fizyce statystycznej i analizie danych. Kierownik projektu przyczynił się do tego rozwoju m.in. rozstrzygając wraz ze swoimi współpracownikami hipotezę postawioną przez László Lovásza, laureata tegorocznej Nagrody Abela, najbardziej prestiżowej nagrody w dziedzinie matematyki. Dalsze badania i rozwój takich metod w ramach projektu będą miały istotne znaczenie i duże zainteresowanie.