

JEDNOPARAMETROWE DEFORMACJE W TEORII FUNKCJI SYMETRYCZNYCH

Symetria jest jednym z najpiękniejszych i najbardziej fascynujących zjawisk, które ludzkość badała już od czasów starożytności. Abstrakcyjny świat matematyki jest w dużym stopniu inspirowany światem zewnętrznym oraz fizyką nim rządzącą, zatem nie jest niespodzianką fakt że koncept symetrii jest szeroko badany przez matematyków, a obiekty wykazujące się dużą symetrią są zazwyczaj najbardziej fundamentalne. **Wielomiany symetryczne** stanowią dobry przykład takiego obiektu. Ich definicja jest bardzo prosta – są to wielomiany, które mają następującą własność symetrii: niezależnie od tego które zmienne wielomianu zamienimy ze sobą miejscami, wielomian pozostaje zupełnie niezmienny. Na przykład:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &:= x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = f(x_1, x_3, x_2) = f(x_2, x_1, x_3) \\ &= f(x_2, x_3, x_1) = f(x_3, x_1, x_2) = f(x_3, x_2, x_1) \end{aligned}$$

jest wielomianem symetrycznym, lecz wielomiany

$$f(x_1, x_2, x_3) := 2x_1 + x_2 + x_3 \neq 2x_2 + x_1 + x_3 = f(x_2, x_1, x_3)$$

nie są. Okazuje się że niektóre wielomiany symetryczne są zaskakująco wyjątkowe – w **naturalny sposób pojawiają się one w wielu dziedzinach matematyki i fizyki**, a ich piękna i bogata struktura była przyczynkiem ważnych odkryć w tych dziedzinach nauk. Jednym z ważnych przykładów są *wielomiany Schura* — początkowo odkryte jako budulec teorii reprezentacji ogólnej grupy liniowej, szybko okazały się być również podstawowym narzędziem w teorii reprezentacji grupy permutacji, w teorii przecięć Grassmannianów i rozmaitości Schuberta, czy wreszcie w teorii całek macierzowych. W ostatnim czasie wielu naukowców odkryło nowe fascynujące relacje pomiędzy kombinatoryką, geometrią enumeratywną, hierarchiami całkowalnymi i teorią przecięć, co w przypadku odkryć Kontsevicha, Mirzakhani, Okounkova i Wittena zostało wyróżnione najbardziej prestiżową nagrodą w matematyce, medalem Fieldsa. Mówiąc obrazowo, odkrycia te pokazują, że pewien istotny obiekt zakodowany przy pomocy wielomianów Schura ma wiele różnych twarzy: może być opisany przy pomocy nieskomplikowanych, łatwych do manipulacji obiektów (**kombinatoryka**), może być również opisany przez układ równań (**hierarchie całkowalne**), wreszcie może być opisany geometrią pewnych skomplikowanych kształtów (**geometria**).

Wiele ważnych modeli w matematyce i fizyce matematycznej stanowi szczególnie przypadek szerszej klasy modeli, w których występuje dodatkowy parametr deformacyjny, często nazywany parametrem “kwantyzacji”. Okazuje się, że wielomiany Schura naturalnie wpasowują się w ten model — są one szczególnym przypadkiem *wielomianów Jacka* w punkcie $b = 0$. Wielomiany te, odkryte w latach siedemdziesiątych dwudziestego wieku, są wielomianami symetrycznymi z dodatkowym parametrem deformacyjnym b i okazały się być obiektem interdyscyplinarnym naturalnie występującym w matematyce i fizyce statystycznej. Niemniej jednak, jednoparametrowy analogon fascynujących więzi między różnymi dziedzinami matematyki i fizyki opisanych powyżej, nie został do tej pory odkryty. Ważą przesłanką sugerującą, że opisana sieć powiązań jest zaledwie cieniem znacznie bardziej ogólnego obrazu jest hipoteza, postawiona w latach dziewięćdziesiątych ubiegłego wieku, która daje precyzyjną (**kombinatorczną**) interpretację tej jednoparametrowej deformacji. Pomimo wielu częstokrotnych wyników w kierunku udowodnienia tej hipotezy, wciąż opiera się ona wysiłkom naukowców i pozostaje problemem otwartym.

Motywowani tą ważną hipotezą, udało się nam niedawno pokazać, że kombinatoryczna twarz zbadana w przypadku klasycznym jest zaledwie projekcją znacznie bardziej ogólnego, jednoparametrowego obrazu, który opisaliśmy. Głównym celem niniejszego projektu jest **udowodnienie wspomnianej wyżej hipotezy** jak również **odkrycie i zbadanie pozostałych więzi** na poziomie “kwantowym”, czyli jednoparametrowej deformacji. W szczególności planujemy opisać hipotetyczną strukturę **całkowalności** oraz strukturę **geometryczną**. To pozwoli uzyskać nowy, globalny opis niezwykłych powiązań między różnymi dziedzinami matematyki i fizyki matematycznej. Zastosowaniem tego opisu będzie uzyskanie **nowych wyników w pozornie niezwiązanych ze sobą dziedzinach matematyki i fizyki**.