Nr rejestracyjny: 2021/41/N/ST1/02816; Kierownik projektu: mgr inż. Mateusz Łukasz Więcek

Zastosowanie multiporządków i systemów tilingów do badania teoriomiarowych i topologicznych działań grup ze średnią

Intensywne badania klasycznych układów dynamicznych (kolejnych iteracji określonego przekształcenia) prowadzone w ubiegłym stuleciu zaowocowały licznymi twierdzeniami dotyczącymi rekurencji, statystycznych własności asymptotycznych orbit oraz chaosu. Naturalnym kierunkiem rozwoju teorii zbudowanej w ostatnich dekadach jest uogólnienie tych twierdzeń na przypadek wielu wzajemnie komutujących transformacji, czy nawet nieprzemiennych grup transformacji. Szczególnie dobrze nadającą się do tego rodzaju uogólnień jest klasa tak zwanych grup ze średnią (ang. amenable groups). Jednakże, wiele twierdzeń udowodnionych w przypadku klasycznych układów dynamicznych opiera się na fakcie, że addytywna grupa liczb całkowitych $\mathbb{Z}$ jest w sposób naturalny uporządkowana liniowo przez relację nierówności $<$ oraz że taki porządek na $\mathbb{Z}$ jest niezmienniczy na dodawanie, innymi słowy jeżeli $n < m$, to $n + k < m + k$ dla każdej liczby całkowitej k. Ponadto, dla dowolnych liczb całkowitych $n < m$, odcinek $\{k \in \mathbb{Z} : n \leq k \leq m\}$ jest skończony. W ogólności, w grupie ze średnią nie musi istnieć niezmienniczy porządek o skończonych odcinkach. Nawet w grupie $\mathbb{Z}^2$, będącej jednym z najprostszych przykładów grupy przemiennej, takowy porządek nie istnieje. Z tego powodu, wyniki znane dla klasycznych układów dynamicznych nie mogą być bezpośrednio przeniesione na przypadek układów z działaniem grup ze średnią, bez odpowiedniego ich zaadaptowania i użycia do ich dowodów nowych narzędzi, stworzonych specjalnie do zastosowań w ogólnym przypadku. Jednym z głównych celów tego projektu jest opracowanie takich narzędzi. Przykładowo, w klasycznych układach dynamicznych, istnieje pojęcie odległej przeszłości odnoszące się do nieskończenie dalekich iteracji transformacji. Pojawia się jednak pytanie, w jaki sposób zdefiniować taki obiekt w przypadku działania dowolnej grupy ze średnią, skoro nie jest jasne jak powinien on być zdefiniowany nawet w stosunkowo prostym przypadku grupy $\mathbb{Z}^2$. W klasycznych układach dynamicznych rozważane są również tak zwane pary asymptotyczne, zdefiniowane jako pary punktów, których orbity zbliżają się do siebie wraz z upływem czasu. Ponownie rodzi się pytanie, jak zdefiniować analogon par asymptotycznych w ogólnym układzie dynamicznym, w którym „czas” jest grupą, w której nie ma jednoznacznie określonego kierunku. Przeszkody tego typu mogą zostać pokonane przy pomocy niedawno stworzonego narzędzia jakim jest multiporządek (ang. multiorder). Jest to rodzina porządków liniowych w grupie G o tej własności, że co prawda żaden z porządków nie jest niezmienniczy, ale cała rodzina jest niezmiennicza w następującym sensie: jeżeli $\prec$ jest porządkiem należącym do tej rodziny i $g \in G$, to porządek $\prec'$ zdefiniowany warunkiem $a \prec' b \Leftrightarrow ag \prec bg$ również należy do tej rodziny. Dla ustalonego porządku $\prec$ z multiporządku, odległa przyszłość może już być zdefiniowana wzdłuż $\prec$. Podobnie można w naturalny sposób zdefiniować pary asymptotyczne ze względu na $\prec$. Wymienione (choć pobieżnie) przykłady dają przedsmak tego w jaki sposób niestandardowe narzędzia mogą być zastosowane do uogólnienia pewnych klasycznych pojęć. Mamy nadzieję, że z pomocą multiporządków i podobnych, niekonwencjonalnych metod możliwe będzie badanie chaosu, par asymptotycznych oraz powiązanych z nimi pojęć w ogólnych układach dynamicznych (z działaniem grup lub półgrup transformacji)

Jednym z kluczowych parametrów układu dynamicznego jest jego entropia (będąca wykładniczą miarą złożoności orbit o rosnących długościach). W latach siedemdziesiątych ubiegłego stulecia, pojęcie to zostało uogólnione na przypadek układów z działaniem dowolnych grup przemiennych, a niedługo potem na przypadek działania grup ze średnią. W klasycznym przypadku, istnieje silne powiązanie pomiędzy dodatniością entropii i istnieniem chaosu oraz par asymptotycznych w danym systemie. Analogiczne rezultaty dla działań grup ze średnią są fragmentaryczne i ograniczają się tylko do węższej klasy grup (w których istnieje porządek niezmienniczy). Jednym z możliwych zastosowań multiporządków jest znalezienie dobrej definicji chaosu i udowodnienie związku między entropią, chaosem i istnieniem par asymptotycznych w pełnej ogólności.

Głównym celem projektu jest rozwinięcie badań nad układami dynamicznymi z działaniem przeliczalnych grup ze średnią, przy użyciu multiporządków i systemów tilingów (będących kolejnym niekonwencjonalnym narzędziem, które okazało się niezwykle użyteczne w analizie ogólnych układów dynamicznych). Jednym z zadań jest uogólnienie klasycznych twierdzeń, dotyczących różnych wariantów chaosu i entropii oraz związanych z nimi pojęć, na przypadek układów z działaniem grup ze średnią, co może prowadzić do uzyskania nowych rezultatów, nieznanych dotąd nawet dla klasycznych układów dynamicznych.